

2° Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} 2 \cdot 3^x - 3 \cdot 2^y = -22 \\ 5 \cdot 3^x + \frac{1}{2} \cdot 2^y = 9 \end{cases} \quad (\text{εκθετικό σύστημα})$$

ΛΥΣΗ

Αν θέσουμε $3^x = \omega$ και $2^y = \varphi$ το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} 2\omega - 3\varphi = -22 \\ 5\omega + \frac{1}{2}\varphi = 9 \end{cases}$$

Το γραμμικό αυτό σύστημα έχει λύση $\omega = 1$ και $\varphi = 8$, οπότε το αρχικό σύστημα γράφεται

$$\begin{cases} 3^x = 1 \\ 2^y = 8 \end{cases} \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \begin{cases} 3^x = 3^0 \\ 2^y = 2^3 \end{cases}$$

από το οποίο παίρνουμε $x = 0$ και $y = 3$.

3° Να λυθούν οι ανισώσεις:

$$\text{i) } 3^{x^2-3x} > \frac{1}{9} \quad \text{ii) } \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+x} < \frac{1}{4}$$

ΛΥΣΗ

i) Έχουμε

$$\begin{aligned} 3^{x^2-3x} > \frac{1}{9} &\Leftrightarrow 3^{x^2-3x} > 3^{-2} \\ &\Leftrightarrow x^2 - 3x > -2 & [\text{αφού } 3 > 1] \\ &\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 > 0 \\ &\Leftrightarrow x < 1 \quad \text{ή} \quad x > 2 \end{aligned}$$

$$\text{ii) Έχουμε} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+x} < \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+x} < \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow x^2 + x > 2 & [\text{αφού } \frac{1}{2} < 1] \\ &\Leftrightarrow x^2 + x - 2 > 0 \\ &\Leftrightarrow x < -2 \quad \text{ή} \quad x > 1 \end{aligned}$$

4° Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

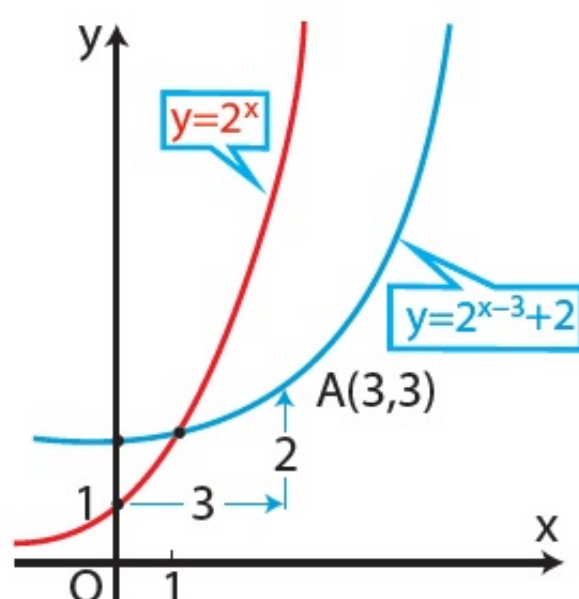
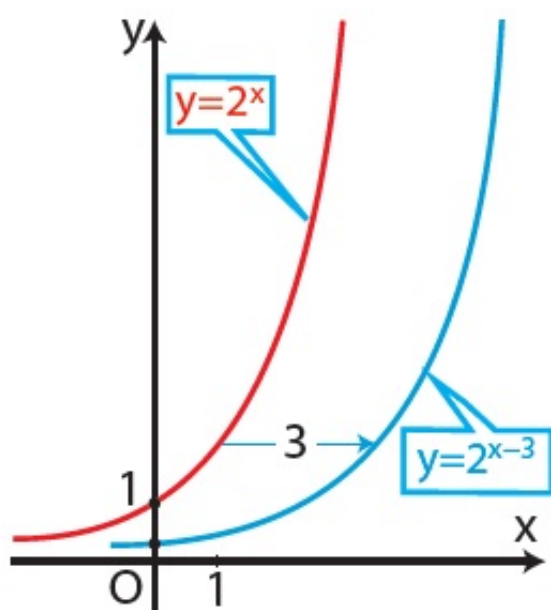
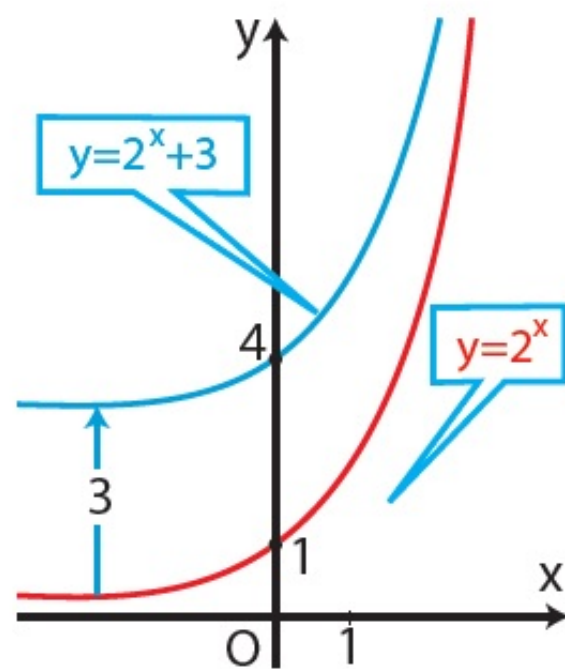
i) $f(x) = 2^x + 3$

ii) $g(x) = 2^{x-3}$

iii) $h(x) = 2^{x-3} + 2$

ΛΥΣΗ

- i) Η γραφική παράσταση της f προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της $\varphi(x) = 2^x$ κατά 3 μονάδες προς τα πάνω.
- ii) Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της $\varphi(x) = 2^x$ κατά 3 μονάδες προς τα δεξιά.
- iii) Τέλος η γραφική παράσταση της h προκύπτει από δύο μετατοπίσεις της $\varphi(x) = 2^x$
- μιας οριζόντιας κατά 3 μονάδες προς τα δεξιά και
 - μιας κατακόρυφης κατά 2 μονάδες προς τα πάνω.



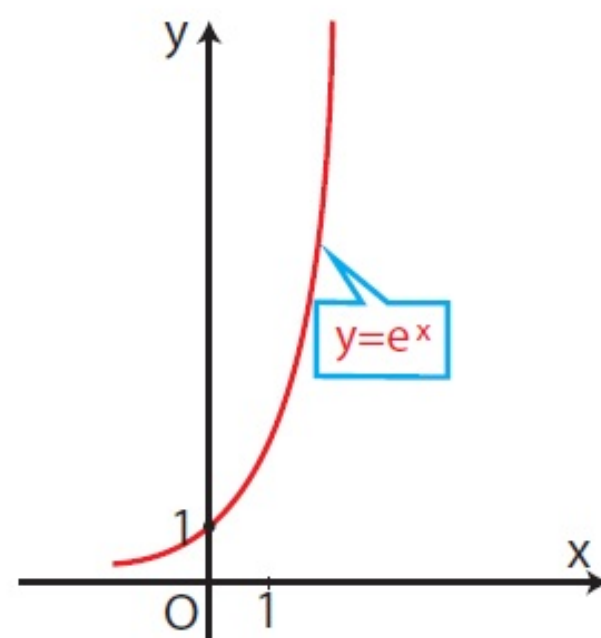
Ο αριθμός e

Παρατηρούμε ότι, καθώς το n αυξάνει, αυξάνει και το $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ και προσεγγίζει έναν ορισμένο πραγματικό αριθμό. Ο αριθμός αυτός είναι άρρητος και συμβολίζεται με e . Ο συμβολισμός αυτός οφείλεται στο μεγάλο Ελβετό, μαθηματικό Leonhard Euler (1707-1783). Ο αριθμός e με προσέγγιση πέντε δεκαδικών ψηφίων είναι $e = 2,71828$.

Συμβολικά γράφουμε

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Σε πολλές πραγματικές εφαρμογές εμφανίζονται εκθετικές συναρτήσεις με βάση τον αριθμό e . Η απλούστερη τέτοια συνάρτηση είναι η $f(x) = e^x$. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται απλώς **εκθετική** και η γραφική της παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α' ΟΜΑΔΑΣ

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

- i) $2^{2x+1} - 4 \cdot 2^x = 0$ ii) $2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x + 2 = 0$
- iii) $3^{2x+1} - 26 \cdot 3^x - 9 = 0$

i) • Η εξίσωση γράφεται $2 \cdot 2^{2x} - 4 \cdot 2^x = 0$

Αν θέσουμε $2^x = y$ αυτή γίνεται $2y^2 - 4y = 0$ και έχει ρίζες τους αριθμούς 0 και 2. Επομένως η αρχική εξίσωση έχει ως λύσεις τις λύσεις των εξισώσεων:

$$2^x = 0 \quad \text{και} \quad 2^x = 2$$

Η $2^x = 0$ είναι αδύνατη, ενώ η $2^x = 2$ γράφεται $2^x = 2^1$ και έχει ρίζα το $x = 1$ που είναι και η μοναδική ρίζα της αρχικής.

ii) Η εξίσωση γράφεται $2 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 2 = 0$.

Αν θέσουμε $2^x = y$ αυτή γίνεται $2y^2 - 5y + 2 = 0$ και έχει ρίζες τους αριθμούς $\frac{1}{2}$ και 2. Επομένως η αρχική εξίσωση έχει ως λύσεις τις λύσεις των

εξισώσεων $2^x = \frac{1}{2}$ και $2^x = 2$, δηλαδή των $2^x = 2^{-1}$ και $2^x = 2^1$ που έχουν ρίζες το **-1, 1** αντιστοίχως.

iii) Ομοίως αν θέσουμε $3^x = y$ η εξίσωση γίνεται $3y^2 - 26y - 9 = 0$ και έχει ρίζες $y = -\frac{1}{3}$ και $y = 9$, οπότε η αρχική έχει ως λύσεις τις λύσεις των εξισώσεων:

$$3^x = -\frac{1}{3} \text{ και } 3^x = 9.$$

Η $3^x = -\frac{1}{3}$ είναι αδύνατη, ενώ η $3^x = 9 \Leftrightarrow 3^x = 3^2$ έχει ρίζα την $x = 2$ που είναι και η μοναδική ρίζα της αρχικής.

Για το επόμενο μάθημα:

Ασκ. Α' Ομάδας: 1 (σελ. 170)