4.2 ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

Αλγοριθμική διαίρεση

Γνωρίζουμε από το Γυμνάσιο την έννοια της Ευκλείδειας ή αλγοριθμικής διαίρεσης μεταξύ θετικών ακέραιων αριθμών. Συγκεκριμένα γνωρίζουμε ότι:

Για κάθε ζεύγος φυσικών αριθμών Δ και δ με $\delta \neq 0$, υπάρχουν δύο μοναδικοί φυσικοί αριθμοί π και υ, τέτοιοι ώστε

$$\Delta=\delta\pi+\upsilon, \qquad 0 \leq \upsilon < \delta \tag{1}$$

Η ισότητα αυτή είναι γνωστή ως **ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης**. Ο Δ λέγεται **διαιρετέος**, ο δ **διαιρέτης**, ο π **πηλίκο** και ο υ **υπόλοιπο** της διαίρεσης.

Η έννοια της διαίρεσης των πολυωνύμων είναι ανάλογη με την Ευκλείδεια διαίρεση που αναφέραμε παραπάνω. Συγκεκριμένα ισχύει:

ΘΕΩΡΗΜΑ

(Ταυτότητα της διαίρεσης) Για κάθε ζεύγος πολυωνύμων Δ(x) και δ(x) με $\delta(x) \neq 0$ υπάρχουν δύο μοναδικά πολυώνυμα π(x) και υ(x), τέτοια ώστε:

$$\Delta(x)=\delta(x)\pi(x)+\upsilon(x), \tag{2}$$

όπου το υ(x) ή είναι το μηδενικό πολυώνυμο ή έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του δ(x).

Όπως και στη διαίρεση μεταξύ φυσικών αριθμών το Δ(x) λέγεται **διαιρετέος**, το δ(x) **διαιρέτης**, το π(x) **πηλίκο** και το υ(x) **υπόλοιπο** της διαίρεσης.

Για να προσδιορίσουμε το πηλίκο π(x) και το υπόλοιπο υ(x) της διαίρεσης ενός πολυωνύμου Δ(x) με ένα πολυώνυμο δ(x), ακολουθούμε μια διαδικασία, ανάλογη με εκείνη της διαίρεσης των θετικών ακεραίων. Στο παράδειγμα που ακολουθεί περιγράφεται βήμα προς βήμα η διαδικασία της διαίρεσης του πολυωνύμου x^3-5x^2+2x-1 με το πολυώνυμο $x-3$.

1. Κάνουμε το σχήμα της διαίρεσης και γράφουμε τα δύο πολυώνυμα.

$$\begin{array}{r|l} x^3-5x^2+2x-1 & x-3 \\ \hline & \end{array}$$

2. Βρίσκουμε τον πρώτο όρο x^2 του πηλίκου διαιρώντας τον πρώτο όρο x^3 του διαιρετέου με τον πρώτο όρο x του διαιρέτη.

$$\begin{array}{r|l} x^3-5x^2+2x-1 & x-3 \\ \cline{2-2} & x^2 \end{array}$$

3. Πολλαπλασιάζουμε το x^2 με x – 3 και το γινόμενο x^3-3x^2 το αφαιρούμε από το διαιρετέο. Βρίσκουμε έτσι το πρώτο μερικό υπόλοιπο $-2x^2+2x-1$.

$$\begin{array}{r|l} x^3-5x^2+2x-1 & x-3 \\ \cline{2-2} -x^3+3x^2 \quad\quad\quad\; & x^2 \\ \cline{1-1} -2x^2+2x-1 & \end{array}$$

4. Επαναλαμβάνουμε τα βήματα 2 και 3 με νέο διαιρετέο το $-2x^2+2x-1$. Βρίσκουμε έτσι το δεύτερο μερικό υπόλοιπο $-4x-1$.

$$\begin{array}{r|l} x^3-5x^2+2x-1 & x-3 \\ \cline{2-2} -x^3+3x^2 \quad\quad\quad\; & x^2-2x \\ \cline{1-1} -2x^2+2x-1 & \\ 2x^2-6x \quad\; & \\ \cline{1-1} -4x-1 & \end{array}$$

5. Τέλος επαναλαμβάνουμε τα βήματα 2 και 3 με νέο διαιρετέο το $-4x-1$. Βρίσκουμε έτσι το τελικό υπόλοιπο -13 και το πηλίκο x^2-2x-4.

$$\begin{array}{r|l} x^3-5x^2+2x-1 & x-3 \\ \cline{2-2} -x^3+3x^2 \quad\quad\quad\; & x^2-2x-4 \\ \cline{1-1} -2x^2+2x-1 & \\ 2x^2-6x \quad\; & \\ \cline{1-1} -4x-1 & \\ 4x-12 & \\ \cline{1-1} -13 & \end{array}$$

Παρατηρούμε ότι ισχύει η ισότητα:

$$x^3-5x^2+2x-1=(x-3)\cdot(x^2-2x-4)+(-13)$$

(διαιρετέος) = (διαιρέτης) · (πηλίκο) + (υπόλοιπο)

που εκφράζει την ταυτότητα της διαίρεσης.

Αν ακολουθήσουμε την παραπάνω διαδικασία για τα πολυώνυμα $4x^4 + x^2 - 3x - 1$ και $2x^2 + x$, έχουμε:

$$
\begin{array}{r|l}
4x^4 + 0x^3 + x^2 - 3x - 1 & 2x^2 + x \\ \cline{2-2}
-4x^4 - 2x^3 \phantom{{}+ x^2 - 3x - 1} & 2x^2 - x + 1 \\ \cline{1-1}
-2x^3 + x^2 - 3x - 1 & \\
2x^3 + x^2 \phantom{{}- 3x - 1} & \\ \cline{1-1}
2x^2 - 3x - 1 & \\
-2x^2 - x \phantom{{}- 1} & \\ \cline{1-1}
-4x - 1 &
\end{array}
$$

Παρατηρήστε ότι συμπληρώσαμε τη δύναμη x^3 με συντελεστή το μηδέν.

Ομοίως για τα πολυώνυμα $2x^3 + 2x^2 - x - 1$ και $2x^2 - 1$ έχουμε

$$
\begin{array}{r|l}
2x^3 + 2x^2 - x - 1 & 2x^2 - 1 \\ \cline{2-2}
-2x^3 \phantom{{}+ 2x^2} + x \phantom{{}- 1} & x + 1 \\ \cline{1-1}
2x^2 \phantom{{}- x} - 1 & \\
-2x^2 \phantom{{}- x} + 1 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Παρατηρήστε ότι στα παραπάνω παραδείγματα η διαίρεση τελειώνει, όταν το υπόλοιπο γίνει μηδέν ή ο βαθμός του γίνει μικρότερος από το βαθμό του διαιρέτη.

Στο τελευταίο παράδειγμα βλέπουμε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι 0. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η διαίρεση είναι **τέλεια**.

Γενικά, αν σε μια διαίρεση είναι $υ(x) = 0$, τότε η διαίρεση λέγεται **τέλεια** και η ταυτότητα της διαίρεσης γράφεται

$$\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x)$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το $\delta(x)$ **διαιρεί** το $\Delta(x)$ ή ότι το $\delta(x)$ είναι **παράγοντας** του $\Delta(x)$ ή ότι το $\Delta(x)$ **διαιρείται με το** $\delta(x)$ ή ακόμη ότι το $\delta(x)$ είναι **διαιρέτης** του $\Delta(x)$. Έτσι για παράδειγμα το $2x^2 - 1$ είναι παράγοντας ή διαιρέτης του $2x^3 + 2x^2 - x - 1$.