Μελέτη της συνάρτησης f(x) = συνx

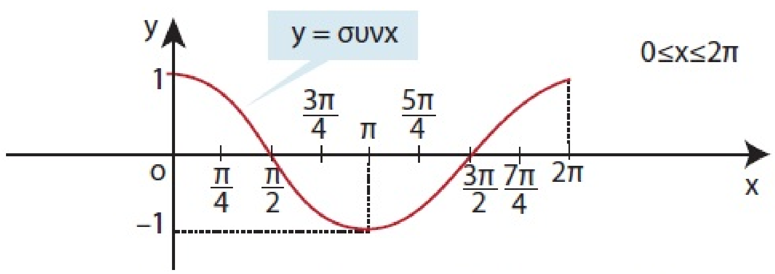
Επειδή η συνάρτηση f(x) = συνx είναι περιοδική με περίοδο 2π, αρκεί να τη μελετήσουμε σε ένα διάστημα πλάτους 2π, π.χ. το [0, 2π].
Από τη μελέτη αυτή προκύπτουν τα συμπεράσματα του επόμενου πίνακα:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
συνx	1 μέγ. ↘	0 ↘	−1 ελάχ. ↗	0 ↗	1 μέγ.

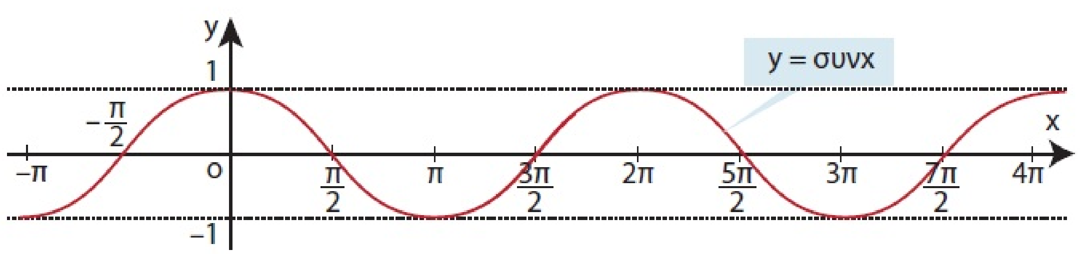
Συντάσσουμε τώρα κατά τα γνωστά και τον ακόλουθο πίνακα τιμών της συνάρτησης συνημίτονο:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
συνx	1	0,71	0	− 0,71	−1	− 0,71	0	0,71	1

Έτσι μπορούμε να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της y = συνx για $0 \le x \le 2\pi$.



Επειδή η συνάρτηση f(x) = συνx είναι περιοδική με περίοδο 2π, η γραφική της παράσταση στο ℝ είναι η ακόλουθη:



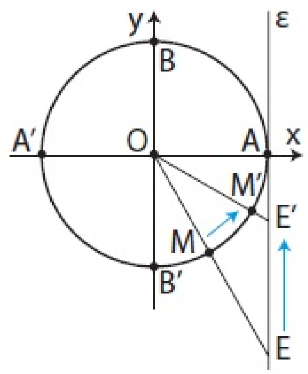
Τέλος γνωρίζουμε ότι οι αντίθετες γωνίες έχουν ίδιο συνημίτονο. Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $συν(-x) = συνx$. Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση f(x) = συνx είναι άρτια και επομένως η γραφική της παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y'y.

Μελέτη της συνάρτησης f(x) = εφx

Επειδή η συνάρτηση f(x) = εφx είναι περιοδική με περίοδο π, αρκεί να τη μελετήσουμε σε ένα διάστημα πλάτους π, π.χ. το $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.
(Το διάστημα είναι ανοικτό, αφού η συνάρτηση εφ δεν ορίζεται στα $-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}$).

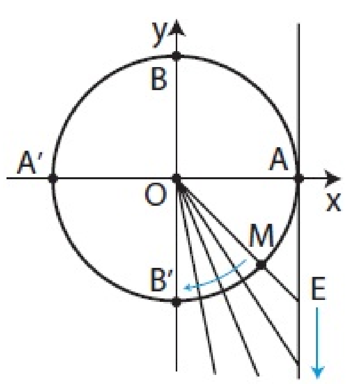
Ας υποθέσουμε ότι η τελική πλευρά της γωνίας x rad τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο Μ και την ευθεία των εφαπτομένων στο σημείο Ε.

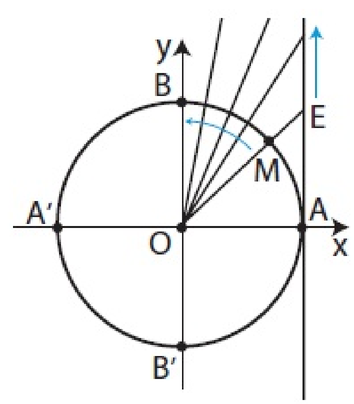
Όπως έχουμε αναφέρει η εφx ισούται με την τεταγμένη του σημείου Ε. Επομένως:



• Όταν ο x παίρνει τιμές από $-\frac{\pi}{2}$ προς το $\frac{\pi}{2}$ το Μ κινείται στον τριγωνομετρικό κύκλο κατά τη θετική φορά από το Β' προς το Β, οπότε η τεταγμένη του σημείου Ε αυξάνει. Αυτό σημαίνει ότι η f(x) = εφx είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

• Όταν ο x «τείνει» στο $-\frac{\pi}{2}$ από μεγαλύτερες τιμές η εφx «τείνει» στο $-\infty$. Γι΄ αυτό λέμε ότι η ευθεία $x=-\frac{\pi}{2}$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f. Επίσης όταν ο x «τείνει» στο $\frac{\pi}{2}$ από μικρότερες τιμές η εφx τείνει στο $+\infty$. Γι΄ αυτό λέμε ότι και η ευθεία $x=\frac{\pi}{2}$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f.

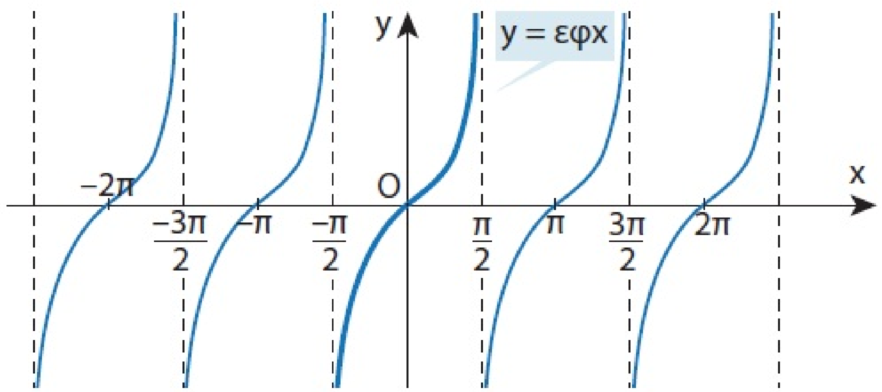




Για να κάνουμε τη γραφική παράσταση της f(x)=εφx συντάσσουμε, με τη βοήθεια των τριγωνομετρικών πινάκων ή με επιστημονικό κομπιουτεράκι, έναν πίνακα τιμών της:

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
εφx	Δεν ορίζεται	$-\sqrt{3} \simeq -1,7$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3} \simeq -0,6$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3} \simeq 0,6$	1	$\sqrt{3} \simeq 1,7$	Δεν ορίζεται

Στη συνέχεια παριστάνουμε με σημεία του επιπέδου τα ζεύγη αυτά των αντίστοιχων τιμών και τα ενώνουμε με μια συνεχή γραμμή. Η γραφική παράσταση της f(x)=εφx φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Είναι φανερό ότι η γραφική παράσταση της f(x)=εφx έχει κέντρο συμμετρίας το Ο, αφού (§ 3.3: εφ(-x) = -εφx είναι περιττή συνάρτηση).