Διαίρεση πολυωνύμου με x–ρ.

Η ταυτότητα της διαίρεσης του πολυωνύμου P(x) με το πολυώνυμο x – ρ γράφεται. $$P(x)=(x-\rho)\pi(x)+\upsilon(x)$$
Επειδή ο διαιρέτης x – ρ είναι πρώτου βαθμού, το υπόλοιπο της διαίρεσης θα είναι ένα σταθερό πολυώνυμο υ. Έτσι έχουμε:
$$P(x)=(x-\rho)\pi(x)+\upsilon$$
και, αν θέσουμε x = ρ, παίρνουμε
$$P(\rho)=(\rho-\rho)\pi(\rho)+\upsilon=0+\upsilon=\upsilon$$
Επομένως
$$P(x)=(x-\rho)\pi(x)+P(\rho)$$
Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

ΘΕΩΡΗΜΑ Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το x–ρ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για x=ρ. Είναι δηλαδή $\upsilon=P(\rho)$

ΘΕΩΡΗΜΑ Ένα πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το x–ρ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του P(x), δηλαδή αν και μόνο αν
$$P(\rho)=0.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ότι το x–ρ είναι παράγοντας του P(x). Τότε
$$P(x)=(x-\rho)\pi(x)$$
Από την ισότητα αυτή για x = ρ παίρνουμε
$$P(\rho)=(\rho-\rho)\pi(\rho)=0,$$
που σημαίνει ότι το ρ είναι ρίζα του P(x).

Αντιστρόφως: Έστω ότι το ρ είναι ρίζα του P(x), δηλαδή ισχύει P(ρ) = 0. Τότε από τη σχέση
$$P(x)=(x-\rho)\pi(x)+P(\rho)$$
παίρνουμε
$$P(x)=(x-\rho)\pi(x),$$
που σημαίνει ότι το x–ρ είναι παράγοντας του P(x).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1° Να εξεταστεί αν τα πολυώνυμα x+2 και x – 1 είναι παράγοντες του πολυωνύμου $P(x)=x^3+x^2-x+2$.

ΛΥΣΗ

Το x+2 γράφεται $x-(-2)$. Επειδή $P(-2)=(-2)^3+(-2)^2-(-2)+2=0$, το –2 είναι ρίζα του P(x). Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, το x+2 είναι παράγοντας του P(x).

Επειδή $P(1)=1^3+1^2-1+2=3\neq 0$, το 1 δεν είναι ρίζα του P(x). Επομένως το x – 1 δεν είναι παράγοντας του P(x).

2° Για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$:

i) Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)=x^3-3x^2+3x-1$ με το x + λ είναι το μηδέν.

ii) Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $Q(x)=\lambda^2x^4+3\lambda x^2-3$ με το x – 1 είναι το 1.

ΛΥΣΗ

i) Επειδή $x+\lambda=x-(-\lambda)$, το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το x+λ είναι $\upsilon=P(-\lambda)$. Επομένως, για να είναι υ = 0 αρκεί:

$$\begin{aligned}P(-\lambda)=0 &\Leftrightarrow (-\lambda)^3-3(-\lambda)^2+3(-\lambda)-1=0\\ &\Leftrightarrow -\lambda^3-3\lambda^2-3\lambda-1=0\\ &\Leftrightarrow \lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1=0\\ &\Leftrightarrow (\lambda+1)^3=0\\ &\Leftrightarrow \lambda=-1\end{aligned}$$

ii) Το υπόλοιπο της διαίρεσης του Q(x) με το $x-1$ είναι υ = Q(1). Επομένως, για να είναι υ = 1 αρκεί:

$$\begin{aligned}Q(1)=1 &\Leftrightarrow \lambda^2 1^4+3\lambda 1^2-3=1\\ &\Leftrightarrow \lambda^2+3\lambda-4=0\\ &\Leftrightarrow \lambda=1 \text{ ή } \lambda=-4\end{aligned}$$