

4.4 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΝΑΓΟΝΤΑΙ ΣΕ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ

Υπάρχουν εξισώσεις, οι οποίες δεν είναι πολυωνυμικές, αλλά με κατάλληλη διαδικασία η λύση τους ανάγεται στη λύση πολυωνυμικών. Τέτοιες εξισώσεις επιλύονται στα παραδείγματα που ακολουθούν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1° Να λυθεί η εξίσωση $x^2 + \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x(2x-1)} = 0$

ΛΥΣΗ

Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq 0$ και $x \neq \frac{1}{2}$. Με αυτούς τους περιορισμούς έχουμε:

$$\begin{aligned}x^2 + \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x(2x-1)} = 0 &\Leftrightarrow x(2x-1)x^2 + x(2x-1)\frac{2}{2x-1} - x(2x-1)\frac{1}{x(2x-1)} = 0 \\&\Leftrightarrow 2x^4 - x^3 + 2x - 1 = 0 \\&\Leftrightarrow x^3(2x-1) + 2x - 1 = 0 \\&\Leftrightarrow (2x-1)(x^3+1) = 0\end{aligned}$$

Η τελευταία εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς $\frac{1}{2}$ και -1 . Λόγω των περιορισμών δεκτή είναι μόνο η $x = -1$.

2° Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{x} = x - 2$.

ΛΥΣΗ

Η εξίσωση ορίζεται για $x \geq 0$. Αν υψώσουμε και τα δυο μέλη της στο τετράγωνο, προκύπτει η εξίσωση $x = x^2 - 4x + 4$, η οποία γράφεται $x^2 - 5x + 4 = 0$ και έχει ως ρίζες τις $x_1 = 4$ και $x_2 = 1$. Οι τιμές αυτές του x , αν και ικανοποιούν τον περιορισμό $x \geq 0$ δεν είναι και οι δύο ρίζες της αρχικής εξίσωσης. Πράγματι αν θέσουμε τις τιμές αυτές στην αρχική εξίσωση, παίρνουμε:

Για $x = 4$: $\sqrt{4} = 4 - 2$ που είναι αληθής ισότητα

Για $x = 1$: $\sqrt{1} = 1 - 2$ που δεν είναι αληθής ισότητα.

Αρα η αρχική εξίσωση έχει ως μοναδική ρίζα την $x=4$.

3° Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{2x+7} - x = 2$.

ΛΥΣΗ

Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x \geq -\frac{7}{2}$. Γι' αυτά τα x διαδοχικά έχουμε:

$$\sqrt{2x+7} = x+2 \quad (\text{απομονώνουμε το ριζικό})$$

$$(\sqrt{2x+7})^2 = (x+2)^2 \quad (\text{υψώνουμε στο τετράγωνο})$$

$$2x+7 = x^2 + 4x + 4$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

Η τελευταία εξίσωση έχει ως ρίζες τους αριθμούς -3 και 1 . Από τις ρίζες αυτές διαπιστώνουμε με επαλήθευση ότι μόνο η $x=1$ είναι ρίζα της αρχικής.

4° Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{2x+6} - \sqrt{x+4} = 1$.

ΛΥΣΗ

Η εξίσωση ορίζεται για τα $x \in \mathbb{R}$, για τα οποία ισχύουν $2x+6 \geq 0$ και $x+4 \geq 0$, δηλαδή για τα $x \geq -3$. Γι' αυτά τα x διαδοχικά έχουμε:

$$\sqrt{2x+6} = 1 + \sqrt{x+4} \quad (\text{απομονώνουμε το ριζικό})$$

$$(\sqrt{2x+6})^2 = (1 + \sqrt{x+4})^2 \quad (\text{υψώνουμε στο τετράγωνο})$$

$$2x+6 = 1 + 2\sqrt{x+4} + x+4$$

$$x+1 = 2\sqrt{x+4}$$

$$(x+1)^2 = 4(x+4) \quad (\text{υψώνουμε στο τετράγωνο})$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

Η τελευταία εξίσωση έχει ως ρίζες τους αριθμούς -3 και 5 . Από τις ρίζες αυτές διαπιστώνουμε με επαλήθευση ότι μόνο η $x=5$ είναι ρίζα της αρχικής.

**Για το επόμενο μάθημα: Ασκ. Α' Ομάδας:
1, 3 (ερωτ. ii, iii, vi) (σελ. 153)**