

## A' ΟΜΑΔΑΣ

1. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

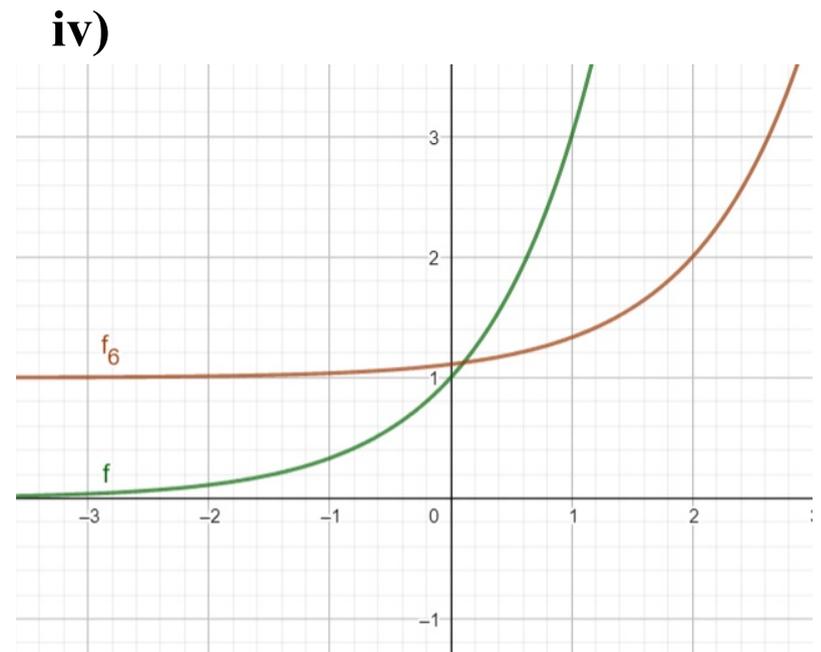
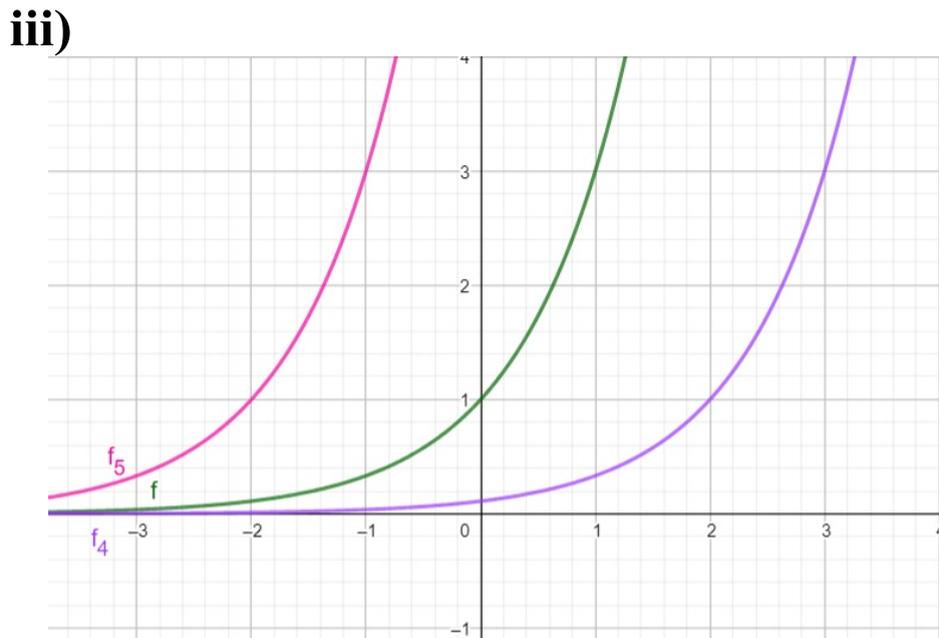
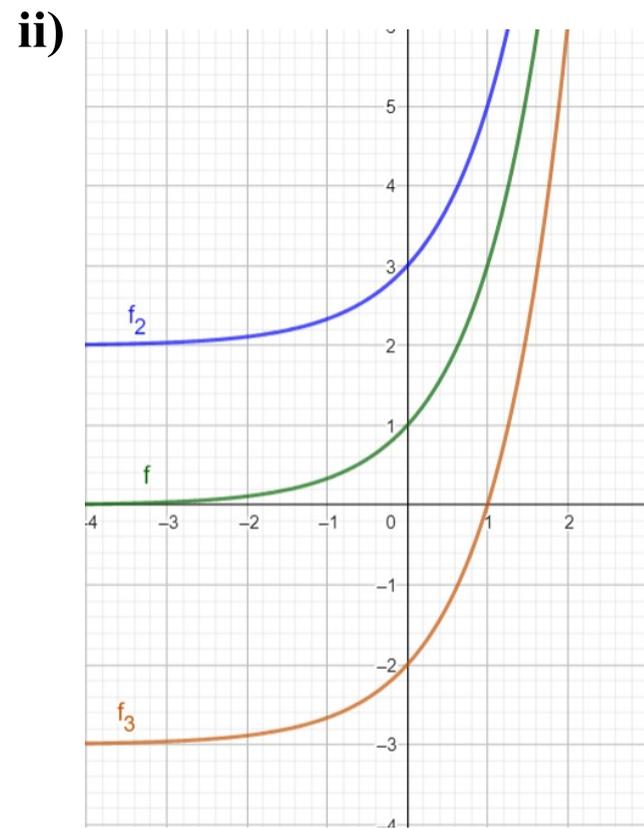
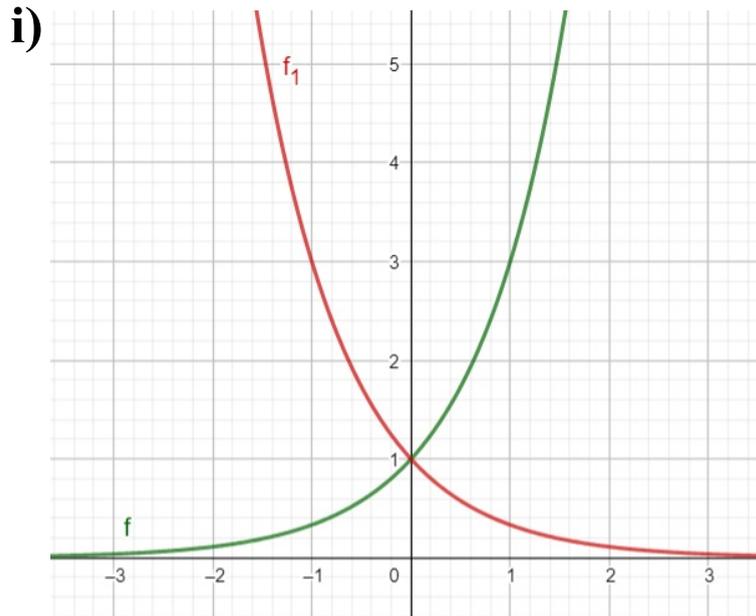
i)  $f(x) = 3^x$  και  $f_1(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

ii)  $f(x) = 3^x$ ,  $f_2(x) = 3^x + 2$  και  $f_3(x) = 3^x - 3$

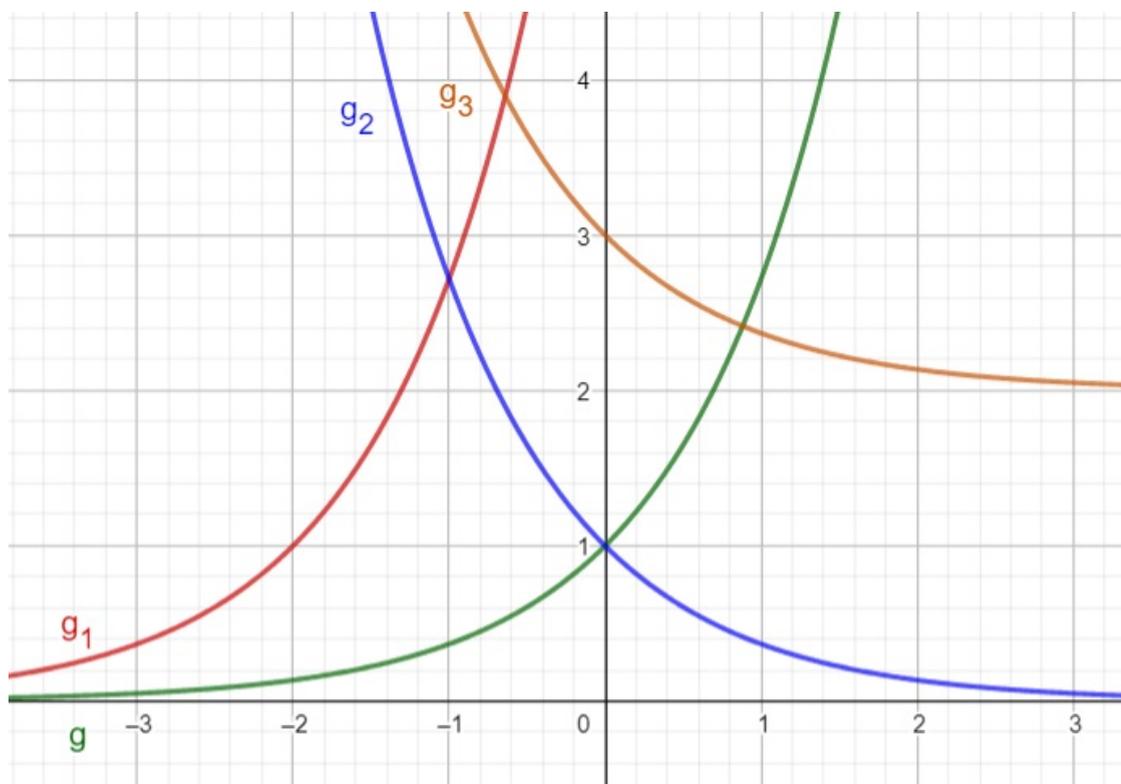
iii)  $f(x) = 3^x$ ,  $f_4(x) = 3^{x-2}$  και  $f_5(x) = 3^{x+2}$

iv)  $f(x) = 3^x$  και  $f_6(x) = 3^{x-2} + 1$

v)  $g(x) = e^x$ ,  $g_1(x) = e^{x+2}$ ,  $g_2(x) = e^{-x}$  και  $g_3(x) = e^{-x} + 2$



v)



4. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i)  $5^{x^2-5x+6} < 1$

ii)  $7^{2x-4} > 7^{x+1}$

i)  $5^{x^2-5x+6} < 1 \Leftrightarrow 5^{x^2-5x+6} < 5^0 \stackrel{[5>1]}{\Leftrightarrow} x^2 - 5x + 6 < 0.$

Το τριώνυμο έχει  $\Delta = 1$  και ρίζες  $x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases}$ .

Άρα  $x^2 - 5x + 6 < 0 \Leftrightarrow x \in (2, 3)$ .

ii)  $7^{2x-4} > 7^{x+1} \stackrel{[7>1]}{\Leftrightarrow} 2x - 4 > x + 1 \Leftrightarrow x > 5.$

iii)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-4}$

iii)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-4} \stackrel{[\frac{1}{2}<1]}{\Leftrightarrow} x + 1 > 2x - 4 \Leftrightarrow x < 5.$

### 5. Να λύσετε τα συστήματα:

$$i) \begin{cases} 8^{2x+1} = 32 \cdot 4^{4y-1} \\ 5 \cdot 5^{x-y} = 5^{2y+1} \end{cases} \quad ii) \begin{cases} 3^x + 2^y = 11 \\ 3^x - 2^y = 7 \end{cases}$$

i)

$$\circ \quad 8^{2x+1} = 32 \cdot 4^{4y-1} \Leftrightarrow (2^3)^{2x+1} = 2^5 \cdot (2^2)^{4y-1} \Leftrightarrow 2^{6x+3} = 2^5 \cdot 2^{8y-2} \Leftrightarrow 2^{6x+3} = 2^{8y+3} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 6x+3 = 8y+3 \Leftrightarrow 6x = 8y \Leftrightarrow 3x = 4y, (1).$$

$$\circ \quad 5 \cdot 5^{x-y} = 5^{2y+1} \Leftrightarrow 5^{x-y+1} = 5^{2y+1} \Leftrightarrow x-y+1 = 2y+1 \Leftrightarrow x = 3y, (2).$$

Με αντικατάσταση της (2) στην (1), βρίσκουμε:

$$3 \cdot 3y = 4y \Leftrightarrow 9y - 4y = 0 \Leftrightarrow 5y = 0 \Leftrightarrow y = 0.$$

οπότε από την (2), προκύπτει:  $x = 3 \cdot 0 = 0$ .

Άρα η λύση του συστήματος είναι  $x = 0$  και  $y = 0$ .

ii) Με πρόσθεση κατά μέλη των εξισώσεων έχουμε:

$$2 \cdot 3^x = 18 \Leftrightarrow 3^x = 9 \Leftrightarrow 3^x = 3^2 \Leftrightarrow x = 2,$$

οπότε με αντικατάσταση στην 1<sup>η</sup> εξίσωση βρίσκουμε:

$$3^2 + 2^y = 11 \Leftrightarrow 2^y = 11 - 9 \Leftrightarrow 2^y = 2 \Leftrightarrow y = 1.$$

Άρα η λύση του συστήματος είναι  $x = 2$  και  $y = 1$ .

### 6. Να λύσετε τα συστήματα:

$$i) \begin{cases} e^x : e^y = 1 \\ e^x \cdot e^y = e^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^x : e^y = 1 \\ e^x \cdot e^y = e^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x-y} = e^0 \\ e^{x+y} = e^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ 2x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=1 \end{cases}.$$

Άρα η λύση του συστήματος είναι  $x = y = 1$ .

$$ii) \begin{cases} 2^x \cdot 2^y = 8 \\ 2^x + 2^y = 6 \end{cases}$$

Θέτουμε  $\kappa = 2^x$  και  $\lambda = 2^y$ , οπότε το σύστημα γράφεται:

$$\begin{cases} 2^x \cdot 2^y = 8 \\ 2^x + 2^y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa \cdot \lambda = 8 \\ \kappa + \lambda = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa \cdot (6-\kappa) = 8 \\ \lambda = 6-\kappa \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\kappa^2 + 6\kappa - 8 = 0 \\ \lambda = 6-\kappa \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = 2 \text{ ή } \kappa = 4 \\ \lambda = 6-\kappa \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = 2 \\ \lambda = 4 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} \kappa = 4 \\ \lambda = 2 \end{cases}.$$

$$\circ \quad \text{Αν } \kappa = 2 \text{ και } \lambda = 4 \text{ τότε: } 2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1 \quad \text{και} \quad 2^y = 4 \Leftrightarrow y = 2.$$

Άρα μία λύση του συστήματος είναι  $x = 1$  και  $y = 2$ .

$$\circ \quad \text{Αν } \kappa = 4 \text{ και } \lambda = 2 \text{ τότε: } 2^x = 4 \Leftrightarrow x = 2 \quad \text{και} \quad 2^y = 2 \Leftrightarrow y = 1.$$

Άρα μία δεύτερη λύση του συστήματος είναι  $x = 2$  και  $y = 1$ .