

5. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\begin{array}{ll} \text{i)} \log(x+1) + \log(x-1) = \log 2 & \text{ii)} \log(x-1) + \log x = 1 - \log 5 \\ \text{iii)} \log x^2 = (\log x)^2 & \text{iv)} \log(x^2 + 1) - \log x = \log 2 \end{array}$$

i) Για να ορίζεται η εξίσωση πρέπει $x+1 > 0$ και $x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Οπότε για $x > 1$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \log(x+1) + \log(x-1) &= \log 2 \\ \Leftrightarrow \log((x+1)(x-1)) &= \log 2 \\ \Leftrightarrow \log(x^2 - 1) &= \log 2 \\ \Leftrightarrow x^2 - 1 &= 2 \\ \Leftrightarrow x^2 &= 3 \\ \Leftrightarrow x &= \sqrt{3} \quad \text{ή} \quad x = -\sqrt{3} \end{aligned}$$

Λόγω του περιορισμού $x > 1$ δεκτή είναι μόνο η ρίζα $\sqrt{3}$.

ii) Για να ορίζεται η εξίσωση πρέπει $x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Οπότε για $x > 1$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \log(x-1) + \log x &= 1 - \log 5 \\ \Leftrightarrow \log((x-1)x) &= \log 10 - \log 5 \\ \Leftrightarrow \log(x^2 - x) &= \log \frac{10}{5} \\ \Leftrightarrow \log(x^2 - x) &= \log 2 \\ \Leftrightarrow x^2 - x &= 2 \\ \Leftrightarrow x^2 - x - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= -1 \quad \text{ή} \quad x = 2 \end{aligned}$$

Λόγω του περιορισμού $x > 1$ δεκτή είναι μόνο η ρίζα 2.

iii) Για να ορίζεται η εξίσωση πρέπει $x > 0$

Οπότε για $x > 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \log x^2 &= (\log x)^2 \\ \Leftrightarrow 2 \log x &= (\log x)^2 \\ \Leftrightarrow 2 \log x - (\log x)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \log x (2 - \log x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \log x = 0 \quad \text{ή} \quad \log x &= 2 \\ \Leftrightarrow x &= 1 \quad \text{ή} \quad x = 100 \end{aligned}$$

iv) Για να ορίζεται η εξίσωση πρέπει $x > 0$

Οπότε για $x > 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned}\log(x^2 + 1) - \log x &= \log 2 \\ \Leftrightarrow \log \frac{(x^2 + 1)}{x} &= \log 2 \\ \Leftrightarrow \frac{(x^2 + 1)}{x} &= 2 \\ \Leftrightarrow x^2 + 1 &= 2x \\ \Leftrightarrow x^2 + 1 - 2x &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 1\end{aligned}$$

6. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $5^x = 2^{1-x}$

ii) $3^{x-1} = 2^{x+1}$

$$\begin{aligned}\text{i) } 5^x &= 2^{1-x} \\ \Leftrightarrow \log 5^x &= \log 2^{1-x} \\ \Leftrightarrow x \log 5 &= (1-x) \log 2 \\ \Leftrightarrow x \log 5 &= \log 2 - x \log 2 \\ \Leftrightarrow x \log 5 + x \log 2 &= \log 2 \\ \Leftrightarrow x(\log 5 + \log 2) &= \log 2 \\ \Leftrightarrow x \log 5 \cdot 2 &= \log 2 \\ \Leftrightarrow x \log 10 &= \log 2 \\ \Leftrightarrow x &= \log 2 \\ \Leftrightarrow x &\simeq 0,30102\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ii) } 3^{x-1} &= 2^{x+1} \\ \Leftrightarrow \log 3^{x-1} &= \log 2^{x+1} \\ \Leftrightarrow (x-1) \log 3 &= (x+1) \log 2 \\ \Leftrightarrow x \log 3 - \log 3 &= x \log 2 + \log 2 \\ \Leftrightarrow x \log 3 - x \log 2 &= \log 3 + \log 2 \\ \Leftrightarrow x(\log 3 - \log 2) &= \log 3 + \log 2 \\ \Leftrightarrow x \log \frac{3}{2} &= \log 3 \cdot 2 \\ \Leftrightarrow x \log 1,5 &= \log 6 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\log 6}{\log 1,5} \\ \Leftrightarrow x &\simeq 4,41902\end{aligned}$$

7. Να συγκριθούν οι αριθμοί:

i) $\log_3 2$ και $\log_3 5$

ii) $\log_{0,3} 5$ και $\log_{0,3} 7$

iii) $\log(x^2 + 1)$ και $\log 2x$

i) Έχουμε $2 < 5 \Leftrightarrow \log_3 2 < \log_3 5$ διότι η $\log_3 x$ είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Έχουμε $5 < 7 \Leftrightarrow \log_{0,3} 5 > \log_{0,3} 7$ διότι η $\log_{0,3} x$ είναι γνησίως φθίνουσα.

iii) Έχουμε $x^2 + 1 \geq 2x$ αφού

$$x^2 + 1 \geq 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0 \text{ που ισχύει}$$

άρα ισχύει $\log(x^2 + 1) \geq \log 2x$ διότι η $\log x$ είναι γνησίως αύξουσα.