

4.

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega} \quad \text{και} \quad \eta\mu^2\omega = \frac{\varepsilon\varphi^2\omega}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Διαιρούμε και τα δύο μέλη της ταυτότητας $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$

με $\sigma\upsilon\nu^2\omega \neq 0$ και έχουμε:

$$\frac{\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} + \frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi^2\omega + 1 = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}.$$

$$\text{Άρα } \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}.$$

ii) Αν στην ταυτότητα $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ θέσουμε $\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}$,

$$\text{έχουμε: } \eta\mu^2\omega + \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega} = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega = 1 - \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega} \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega = \frac{\varepsilon\varphi^2\omega}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}.$$

$$\text{Άρα } \eta\mu^2\omega = \frac{\varepsilon\varphi^2\omega}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ (Σελ 62)

1^η Αν $\eta\mu\omega = \frac{5}{13}$ και $90^\circ < \omega < 180^\circ$, να βρεθούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω .

ΛΥΣΗ

Από την ταυτότητα $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ προκύπτει ότι $\sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \eta\mu^2\omega$.

Αντικαθιστούμε το $\eta\mu\omega$ με $\frac{5}{13}$ και έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1 - \frac{25}{169} = \frac{169 - 25}{169} = \frac{144}{169}.$$

Επειδή $90^\circ < \omega < 180^\circ$, είναι $\sigma\upsilon\nu\omega < 0$, οπότε έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu\omega = -\sqrt{\frac{144}{169}} = -\frac{12}{13}$$

Από τις ταυτότητες τώρα $\epsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$ και $\sigma\varphi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$, έχουμε:

$$\epsilon\varphi\omega = \frac{\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}} = -\frac{5}{12} \quad \text{και} \quad \sigma\varphi\omega = \frac{-\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} = -\frac{12}{5}.$$

Για το επόμενο μάθημα: Ασκήσεις Α' Ομάδας 1, 2, 3, 4 σελ. 63