

5.2 ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

Η έννοια του λογάριθμου

μπορούμε να βρούμε κατά προσέγγιση τη λύση της εξίσωσης:

$$a^x = \theta, \text{ όπου } a > 0 \text{ με } a \neq 1 \text{ και } \theta > 0$$

Η παραπάνω εξίσωση έχει μοναδική λύση, αφού η εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x$ είναι γνησίως μονότονη και ο θ ανήκει στο σύνολο τιμών της. Τη μοναδική αυτή λύση τη συμβολίζουμε με $\log_a \theta$ και την ονομάζουμε **λογάριθμο του θ ως προς βάση a** .

Ωστε, αν $a > 0$ με $a \neq 1$ και $\theta > 0$, τότε:

$$a^x = \theta \Leftrightarrow x = \log_a \theta$$

Ισοδύναμα αυτό διατυπώνεται ως εξής:

Ο $\log_a \theta$ είναι ο εκθέτης στον οποίο πρέπει να υψώσουμε τον a για να βρούμε το θ

Από τον παραπάνω ορισμό του λογαρίθμου προκύπτει αμέσως ότι, αν $a > 0$ με $a \neq 1$, τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για κάθε $\theta > 0$ ισχύει:

$$\log_a a^x = x \quad \text{και} \quad a^{\log_a \theta} = \theta$$

Εξάλλου, επειδή $1 = a^0$ και $a = a^1$, ισχύει:

$$\log_a 1 = 0 \quad \text{και} \quad \log_a a = 1$$

Ιδιότητες των λογαρίθμων

Αν $a > 0$ με $a \neq 1$, τότε για οποιαδήποτε $\theta_1, \theta_2, \theta > 0$ και $k \in \mathbb{R}$ ισχύουν:

$$1. \log_a (\theta_1 \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$$

$$2. \log_a \frac{\theta_1}{\theta_2} = \log_a \theta_1 - \log_a \theta_2$$

$$3. \log_a \theta^k = k \log_a \theta$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

1. Έστω ότι είναι:

$$\log_{\alpha} \theta_1 = x_1 \quad \text{και} \quad \log_{\alpha} \theta_2 = x_2 \quad (1)$$

Τότε έχουμε

$$\alpha^{x_1} = \theta_1 \quad \text{και} \quad \alpha^{x_2} = \theta_2$$

οπότε

$$\alpha^{x_1} \cdot \alpha^{x_2} = \theta_1 \theta_2, \quad \text{δηλαδή} \quad \alpha^{x_1+x_2} = \theta_1 \theta_2$$

Από τον ορισμό όμως του λογάριθμου, η τελευταία ισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$\log_{\alpha} (\theta_1 \theta_2) = x_1 + x_2$$

από την οποία, λόγω των (1), έχουμε τελικά:

$$\log_{\alpha} (\theta_1 \theta_2) = \log_{\alpha} \theta_1 + \log_{\alpha} \theta_2$$

2. Εργαζόμαστε με τον ίδιο τρόπο.

3. Έστω ότι είναι:

$$\log_{\alpha} \theta = x \quad (2)$$

Τότε έχουμε $\alpha^x = \theta$ οπότε:

$$\alpha^{kx} = \theta^k$$

Από τον ορισμό όμως του λογάριθμου, η τελευταία ισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$\log_{\alpha} \theta^k = kx$$

από την οποία, λόγω της (2), προκύπτει ότι:

$$\log_{\alpha} \theta^k = k \cdot \log_{\alpha} \theta$$

Δεκαδικοί λογάριθμοι

Πριν από την εξάπλωση των ηλεκτρονικών υπολογιστών, για πολύπλοκους αριθμητικούς υπολογισμούς χρησιμοποιούσαν λογάριθμους με βάση το 10. Οι λογάριθμοι αυτοί λέγονται **δεκαδικοί** ή **κοινοί λογάριθμοι**.

Ο δεκαδικός λογάριθμος ενός θετικού αριθμού θ , συμβολίζεται απλά με $\log \theta$ και όχι με $\log_{10} \theta$.

Επομένως:

$$\log \theta = x \Leftrightarrow 10^x = \theta$$

Φυσικοί λογάριθμοι

Γνωρίσαμε σε προηγούμενες παραγράφους τον αριθμό e και είδαμε τη σημασία του στην περιγραφή διαφόρων φαινομένων. Στα μαθηματικά είναι πολύ χρήσιμοι και οι λογάριθμοι με βάση τον αριθμό e . Οι λογάριθμοι αυτοί λέγονται **φυσικοί ή νεπέριοι λογάριθμοι**.

Ο φυσικός λογάριθμος ενός θετικού αριθμού θ συμβολίζεται με $\ln \theta$ και όχι με $\log_e \theta$.

Επομένως:

$$\ln \theta = x \Leftrightarrow e^x = \theta$$



ΠΡΟΣΟΧΗ

Επειδή το σύμβολο $\log_a \theta$ ορίσθηκε μόνο όταν $a > 0$ με $a \neq 1$ και $\theta > 0$, όπου στο εξής το συναντάμε, θα εννοείται ότι $a > 0$ με $a \neq 1$ και $\theta > 0$ χωρίς να τονίζεται ιδιαίτερα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α' ΟΜΑΔΑΣ

4. Να αποδείξετε ότι:

i) $\log_2 3 + 2\log_2 4 - \log_2 12 = 2$

$$\begin{aligned}\log_2 3 + 2\log_2 4 - \log_2 12 &= \log_2 3 + \log_2 4^2 - \log_2 12 = \\ &= \log_2 3 + \log_2 16 - \log_2 12 = \\ &= \log_2 \left(\frac{3 \cdot 16}{12} \right) = \\ &= \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2.\end{aligned}$$

Για το επόμενο μάθημα: Ασκ. Α' Ομάδας 1, 2, 3 (σελ.179)