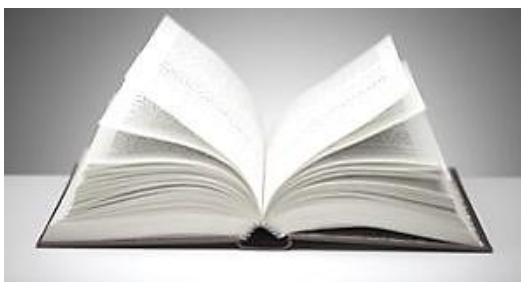




Εξάσκηση στη Θεωρία

ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ



ΕΚΔΟΣΗ 2023



ΠΡΟΛΟΓΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Για να ανταποκριθεί ο μαθητής με επιτυχία στα Μαθηματικά Προσανατολισμού της Γ΄ Λυκείου είναι απαραίτητη η πολύ καλή γνώση της θεωρίας τους.

Το σύγγραμμα αυτό, ως προς την δομή του, αποτελείται από:

- πιθανές ερωτήσεις θεωρίας
- πιθανές αποδείξεις για τις εξετάσεις
- ερωτήσεις του τύπου «Σωστό ή Λάθος»
- ισχυρισμούς προς διερεύνηση και αντιπαραδείγματα

Τα παραπάνω εξασφαλίζουν την κατανόηση της θεωρίας και κατ' επέκταση θα σας βοηθήσουν να αντιμετωπίσετε, με την απαιτούμενη μαθηματική ακρίβεια, τις ασκήσεις.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Πιθανές Ερωτήσεις.....	5
Πιθανές αποδείξεις για τις εξετάσεις	10
Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό ή Λάθος».....	13
Αντιπαραδείγματα και ισχυρισμοί	30

Πιθανές Ερωτήσεις**Συναρτήσεις**

1. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $A \subseteq \mathbb{R}$; (Σελ. 15)
2. Τι ονομάζουμε σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το A ; (Σελ. 15)
3. Ποια δυο στοιχεία αρκεί να αναφέρουμε για να ορίσουμε μια συνάρτηση f ; (Σελ. 15)
4. Τι καλείται γραφική παράσταση της συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το A ; (Σελ. 16)
5. Πότε δυο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες; (Σελ. 23)
6. Δίνεται συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A και συνάρτηση g με πεδίο ορισμού το B . Να ορίσετε τις συναρτήσεις: $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ και f/g . (Σελ. 24)
7. Δίνεται συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A και συνάρτηση g με πεδίο ορισμού το B . Να ορίσετε την συνάρτηση της σύνθεσης της f με την g . (Σελ. 25)
Πότε η παράσταση $g \circ f$ δεν ορίζεται;
8. Α) Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της; Και πότε γνησίως φθίνουσα; (Σελ. 31)
Β) Πότε μια συνάρτηση f λέγεται αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της; Και πότε φθίνουσα; (Σελ. 31)
9. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως μονότονη σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της; (Σελ. 31)
10. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$, ολικό μέγιστο το $f(x_0)$; Και πότε ολικό ελάχιστο το $f(x_0)$; (Σελ. 32)
11. Ποια καλούμε ολικά ακρότατα μιας συνάρτησης; (Σελ. 32)
12. Να αναφέρετε παράδειγμα συνάρτησης που δεν έχει ολικά ακρότατα. (Σελ. 33)
13. Πότε μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται 1-1; (Σελ. 33)
14. Να αναφέρετε παράδειγμα συνάρτησης που δεν είναι 1-1. (Σελ. 34)
15. Να αναφέρετε παράδειγμα συνάρτησης που είναι 1-1 αλλά όχι γνησίως μονότονη. (Σελ. 35)
16. Έστω μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι 1-1. Να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση. (Σελ. 35-36)

Όρια - Συνέχεια

17. Πότε μπορούμε να αναζητήσουμε το όριο μιας συνάρτησης f στο x_0 ; (Σελ. 41)
Και πότε στο $+\infty$ ή $-\infty$; (Σελ. 65)
18. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη στο σύνολο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.
Να συμπληρώσετε τα κενά (Σελ. 43-44) :
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \dots$
 - $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = \lambda$
 - $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \lambda) = \dots$
19. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής. (Σελ. 51)
20. Τι ονομάζουμε ακολουθία; (Σελ. 68)
21. Ποιες απροσδιόριστες μορφές γνωρίζετε; Για καθεμία να αναφέρετε ένα παράδειγμα και τον τρόπο αντιμετώπισης της. (Σελ. 61, 62, 66, 40)
22. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της; Ποια γεωμετρική ερμηνεία δίνεται; (Σελ. 70)
23. Πότε μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της; Να δώσετε ένα παράδειγμα για την κάθε περίπτωση. (Σελ. 70-71)
24. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής; (Σελ. 71)
25. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα (α, β) ; (Σελ. 73)
26. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$; (Σελ. 73)
27. Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Bolzano. Ποια είναι η γεωμετρική του ερμηνεία; (Σελ. 74)
28. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών και να αναφέρετε την γεωμετρική του ερμηνεία. (Σελ. 76)
29. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης τιμής. (Σελ. 77)
30. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$, ποιο είναι το σύνολο τιμών της; Ποιο θα ήταν, αν η f ήταν γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $[\alpha, \beta]$; (Σελ. 78)
31. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο (α, β) , ποιο είναι το σύνολο τιμών της; Ποιο θα ήταν αν η f ήταν γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο (α, β) ; (Σελ. 78)

Παράγωγος

32. Έστω συνάρτηση f και $A(x_0, f(x_0))$ σημείο της C_f . Τι ορίζουμε ως εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της A ; Ποια είναι η εξίσωση της; (Σελ. 94)

33. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της; (Σελ. 95) Ποια γεωμετρική ερμηνεία δίνετε;
34. Να αναφέρετε παράδειγμα συνάρτησης που είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της αλλά όχι παραγωγίσιμη στο x_0 . (Σελ. 99)
35. Η συνάρτηση $x = S(t)$ δίνει τη θέση (σε ευθύγραμμο άξονα) ενός κινητού K τη χρονική στιγμή t . Αν η S είναι παραγωγίσιμη στο t_0 , τι ονομάζουμε στιγμιαία ταχύτητά του K τη χρονική στιγμή t_0 ; (Σελ. 96)
36. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $x_0 \in D_f$ και το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ της C_f . Τι ονομάζουμε κλίση της C_f στο A ή κλίση της f στο x_0 ; (Σελ. 96)
37. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) ; (Σελ. 104)
38. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$; (Σελ. 104)
39. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σύνολο A ; (Σελ. 104)
40. Δίνεται μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A και A_1 είναι το σύνολο των σημείων στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Να ορίσετε την συνάρτηση f' . (Σελ. 104)
41. Να διατυπώσετε τον κανόνα της αλυσίδας. (Σελ. 116)
42. Έστω δυο μεταβλητά μεγέθη x, y τα οποία συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 . Τι ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0 ; (Σελ. 123)
43. Η συνάρτηση $x = S(t)$ δίνει τη θέση (σε ευθύγραμμο άξονα) ενός κινητού K τη χρονική στιγμή t . Αν η S είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο t_0 , ποια η επιτάχυνση του K τη χρονική στιγμή t_0 ; (Σελ. 123)
44. Σε μια οικονομία, έστω K, E και P , το κόστος παραγωγής, η είσπραξη, και το κέρδος αντίστοιχα όταν παράγονται x μονάδες προϊόντος. Τι ονομάζουμε οριακό κόστος, τι οριακή είσπραξη και τι οριακό κέρδος όταν $x = x_0$; (Σελ. 123-124)

Θεώρημα Rolle - ΘΜΤ

45. Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Rolle. (Σελ. 128)
46. Να διατυπώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος Rolle, και να κάνετε ένα πρόχειρο σχήμα αναφοράς. (Σελ. 128)
47. Να διατυπώσετε το Θεώρημα της Μέσης Τιμής. (Σελ. 128)
48. Να διατυπώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος της Μέσης Τιμής, και να κάνετε ένα πρόχειρο σχήμα αναφοράς. (Σελ. 129)

Συνέπειες ΘΜΤ

49. Να αναφέρετε παράδειγμα συνάρτησης f που δεν είναι σταθερή στην ένωση διαστημάτων $(-\infty, a) \cup (a, +\infty)$ αλλά $f'(x) = 0$ για κάθε $x \neq a$. (Σελ. 134)
50. Να αναφέρετε παράδειγμα συνάρτησης που είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ αλλά η παράγωγος της δεν είναι υποχρεωτικά θετική εσωτερικά του Δ . (Σελ. 136)

Τοπικά ακρότατα - Θεώρημα Fermat

51. Πότε θα λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A , παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 \in A$; Και πότε τοπικό ελάχιστο; (Σελ. 140-141)
52. Τι ονομάζουμε ακρότατα μιας συνάρτησης f ; Τι καλούμε θέσεις τοπικών ακροτάτων της f ; (Σελ. 141)
53. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat. Ποια είναι η γεωμετρική του ερμηνεία; (Σελ. 142) Ισχύει το αντίστροφο; Δώστε παράδειγμα. (Σελ. 136 σχόλιο)
54. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ . Ποια σημεία του Δ ονομάζονται κρίσιμα; (Σελ. 143)
55. Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις των ακροτάτων μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ ; (Σελ. 143)

Κυρτότητα – Σημεία Καμψής

56. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή σ' ένα διάστημα Δ ; Και πότε κοίλη; (Σελ. 155)
57. Να αναφέρετε παράδειγμα συνάρτησης f που είναι κυρτή σ' ένα διάστημα Δ αλλά η f'' δεν είναι υποχρεωτικά θετική εσωτερικά του Δ . (Σελ. 156)
58. Πότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμψής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$; (Σελ. 157)
59. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f παρουσιάζει καμψή στο (εσωτερικό) $x_0 \in D_f$; (Σελ. 157)
60. Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις των σημείων καμψής μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ ; (Σελ. 157)

Ασύμπτωτες – Κανόνες DLH- Μελέτη συνάρτησης

61. Ποτέ η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f ; (Σελ. 161)
62. Ποτέ η ευθεία $y = l$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$; Και πότε στο $-\infty$; (Σελ. 162)
63. Ποτέ η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$; Και πότε στο $-\infty$; (Σελ. 162)

64. Που αναζητάμε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης; (Σελ. 163)
65. Να διατυπώσετε τους κανόνες De l' Hospital για τις μορφές $\frac{0}{0}$ και $\frac{+\infty}{+\infty}$. (Σελ. 164-165)
66. Ποια βήματα περιλαμβάνει η “μελέτη μιας συνάρτησης”; (Σελ. 169)

Ολοκλήρωμα

67. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ . Ποια συνάρτηση ονομάζεται αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ; (Σελ. 185)
68. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$. Να ορίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = a, x = \beta$. (Σελ. 210)
69. Δίνεται συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$. Να ορίσετε το ολοκλήρωμα $\int_a^\beta f(x)dx$ της f από το a στο β . (Σελ. 211)
70. Να διατυπώσετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού λογισμού. (Σελ. 216)
71. Να γράψετε τον τύπο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες για το ορισμένο ολοκλήρωμα, με τις προϋποθέσεις που πρέπει να πληρούν οι εμπλεκόμενες συναρτήσεις. (Σελ. 218)
72. Να γράψετε τον τύπο της ολοκλήρωσης με αλλαγή μεταβλητής για το ορισμένο ολοκλήρωμα, με τις προϋποθέσεις που πρέπει να πληρούν οι εμπλεκόμενες συναρτήσεις. (Σελ. 219)
73. Αν $c > 0$, και $a < \beta$ τότε ποιο εμβαδόν εκφράζει το $\int_a^\beta c dx$;
74. Δίνονται συνεχείς συναρτήσεις $f, g: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [a, \beta]$. Να γράψετε το ολοκλήρωμα που υπολογίζει το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τη γραφική παράσταση της g και τις ευθείες $x = a, x = \beta$. (Σελ. 226)
75. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$. Να γράψετε το ολοκλήρωμα που υπολογίζει το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = a, x = \beta$. (Σελ. 226)
76. Δίνονται συνεχείς συναρτήσεις $f, g: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$. Να γράψετε το ολοκλήρωμα που υπολογίζει το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και της g , και τις ευθείες $x = a$ και $x = \beta$. (Σελ. 227)



Πιθανές αποδείξεις για τις εξετάσεις

1. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ και $x_0 \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$. (Σελ. 49)
2. Έστω η ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ και $x_0 \in \mathbb{R}$, $Q(x_0) \neq 0$. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$. (Σελ. 49)
3. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) \neq f(\beta)$, να δείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha), f(\beta)$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \eta$. (Σελ. 76)
4. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε να δείξετε ότι είναι και συνεχής στο x_0 . (Σελ. 99)
5. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = c$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $(c)' = 0$. (Σελ. 105)
6. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $(x)' = 1$. (Σελ. 105)
7. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $(x^n)' = nx^{n-1}$. (Σελ. 106)
8. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. (Σελ. 106)
9. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , να δείξετε ότι και η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$. (Σελ. 111)
10. A) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$. (Σελ. 114)
B) Να δείξετε ότι $(x^k)' = kx^{k-1}$ όπου $k \in \mathbb{Z} - \{0, 1\}$ και $x \in \mathbb{R}^*$.
11. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon \varphi x$ είναι παραγωγίσιμη στο $A = \mathbb{R} - \{x | \sigma \nu x = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{\sigma \nu^2 x}$. (Σελ. 114)
12. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$. (Σελ. 116)
13. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = a^x$, $a > 0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $(a^x)' = a^x \ln a$. (Σελ. 117)
14. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln |x|$, $x \neq 0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$. (Σελ. 117)

15. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ . Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $f'(x) = 0$ για κάθε x εσωτερικό σημείο του Δ , να δείξετε ότι η f είναι σταθερή στο Δ . (Σελ. 133)
16. Έστω δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες σ' ένα διάστημα Δ . Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και $f'(x) = g'(x)$ για κάθε x εσωτερικό σημείο του Δ , να δείξετε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε $f(x) = g(x) + c$ για κάθε $x \in \Delta$. (Σελ. 133)
17. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ . Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ . (Σελ. 135)
18. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να δείξετε ότι $f'(x_0) = 0$. (Σελ. 142)
19. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , να δείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f . (Σελ. 144)
20. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, να δείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) . (Σελ. 145)
21. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , να δείξετε ότι όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ . (Σελ. 186)
22. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , να δείξετε ότι κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$. (Σελ. 186)
23. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, να δείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$. (Σελ. 217)
24. Έστω συναρτήσεις f και g , συνεχείς στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $f(x) \geq g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$. Να δείξετε με χρήση κατάλληλων σχημάτων ότι $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x))dx$. (Σελ. 225)
25. Έστω συναρτήσεις f και g , συνεχείς στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f και g και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$. Να δείξετε ότι $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x))dx$. (Σελ. 226)

26. Έστω g συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και $g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και Ω το χωρίο που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της g , τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$ και τον άξονα $x'x$. Να δείξετε ότι $E(\Omega) = -\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$. (Σελ. 226)



Μπαλταβιάς Β.

Ερωτήσεις του τύπου Σωστό ή Λάθος

Συναρτήσεις	
1.	Δίνεται πραγματική συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A . Τότε κάθε στοιχείο $x \in A$, αντιστοιχίζεται κατ' ανάγκη σ' ένα μόνο πραγματικό αριθμό $y \in f(A)$.
2.	Δίνεται πραγματική συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A . Τότε κάθε στοιχείο $y \in f(A)$, αντιστοιχίζεται κατ' ανάγκη σ' ένα μόνο πραγματικό αριθμό $x \in A$.
3.	Το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ με $y = f(x)$ για όλα τα $x \in D_f$, λέγεται γραφική παράσταση της συνάρτησης f .
4.	Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της συνάρτησης f για όλα τα $x \in D_f$ λέγεται σύνολο τιμών της f .
5.	Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης το πολύ ένα κοινό σημείο.
6.	Σε μια γραφική παράσταση μιας συνάρτησης μπορεί να έχουμε δυο σημεία με την ίδια τετμημένη.
7.	Ο κύκλος είναι γραφική παράσταση συνάρτησης.
8.	Το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι το σύνολο A των τετμημένων των σημείων της γραφικής παράστασης C_f της f .
9.	Το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι το σύνολο $f(A)$ των τεταγμένων των σημείων της γραφικής παράστασης C_f της f .
10.	Η τιμή της συνάρτησης f στο $x_0 \in D_f$ είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας $x = x_0$ και της C_f .
11.	Οι γραφικές παραστάσεις των f και $ f $ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $x'x$.
12.	Οι γραφικές παραστάσεις των f και $-f$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $x'x$.
13.	Για κάθε συνάρτηση f η γραφική παράσταση της $ f $ αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον $x'x$ και από τα συμμετρικά ως προς τον $x'x$, των τμημάτων της C_f , που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$.
14.	Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f + g$ είναι η ένωση $A \cup B$ όπου A το πεδίο ορισμού της f και B το πεδίο ορισμού της g .
15.	Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f/g είναι η τομή $A \cap B$ όπου A το πεδίο ορισμού της f και B το πεδίο ορισμού της g .

16. Οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x^2}$ και $g(x) = (\sqrt{x})^2$ είναι ίσες.	
17. Για δυο συναρτήσεις f, g ορίζεται πάντοτε η σύνθεση $f \circ g$.	
18. Αν για τις f, g ορίζονται οι $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε απαραίτητα είναι $f \circ g = g \circ f$.	
19. Αν για δυο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι $f \circ g$ και $g \circ f$ τότε υποχρεωτικά είναι $f \circ g \neq g \circ f$.	
20. Αν f, g, h τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h \circ (g \circ f)$ τότε ορίζεται και η συνάρτηση $(h \circ g) \circ f$ και μάλιστα ισχύει $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.	
21. Αν f και g είναι συναρτήσεις με πεδία ορισμού A και B αντίστοιχα τότε ορίζεται η $g \circ f$ αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$.	
22. Αν f και g είναι συναρτήσεις με πεδία ορισμού A και B αντίστοιχα τότε ορίζεται η $g \circ f$ αν $A \cap B \neq \emptyset$.	
23. Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται 1-1 όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 \neq x_2$ τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$.	
24. Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1 αν και μόνο εάν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της, η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x .	
25. Αν η συνάρτηση f είναι 1-1 τότε απαραίτητα είναι γνησίως μονότονη.	
26. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη τότε είναι και 1-1.	
27. Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι 1-1 αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.	
28. Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει την γραφική της παράσταση το πολύ σ' ένα σημείο.	
29. Η συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$ με $a, \beta \in \mathbb{R}$ είναι απαραίτητα 1-1.	
30. Αν μια συνάρτηση f είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, υπάρχουν δυο διαφορετικά σημεία της γραφικής παράστασης της με την ίδια τεταγμένη.	
31. Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \geq f(x_2)$.	
32. Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της όταν υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ τέτοια ώστε να ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.	

33. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $f(1) < f(2)$ τότε η f είναι απαραίτητα γνησίως αύξουσα.	
34. Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέμνει πάντα τον $x'x$ ακριβώς σ' ένα σημείο.	
35. Αν η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ αντιστρέφεται τότε $f^{-1}(f(x)) = x$, για κάθε $x \in A$.	
36. Αν η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ αντιστρέφεται τότε $f(f^{-1}(x)) = x$, για κάθε $x \in A$.	
37. Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.	
38. Αν η συνάρτηση f έχει αντίστροφη την f^{-1} και η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το $A(\alpha, \beta)$ τότε η γραφική παράσταση της f^{-1} διέρχεται από το σημείο $A'(\beta, \alpha)$.	
39. Αν η συνάρτηση f έχει αντίστροφη την f^{-1} και η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο A με την ευθεία $y = x$ τότε το A ανήκει και στη γραφική παράσταση της f^{-1} .	
40. Η αντίστροφη συνάρτηση της $f(x) = \log_a x$ είναι η $g(x) = a^x$ όπου $0 < a \neq 1$.	
41. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 \in A$ όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.	
42. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 \in A$ όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάποιο $x \in A$.	
43. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 \in A$ όταν $f(x) < f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.	
44. Αν ισχύει $f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε το 1 είναι απαραίτητα μέγιστο της συνάρτησης f .	
45. Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ έχει μια μόνο θέση ολικού μεγίστου.	
46. Κάθε συνάρτηση έχει ολικό μέγιστο ή ολικό ελάχιστο.	
Όρια	
47. Αν μια συνάρτηση f έχει όριο στο x_0 , τότε αυτό είναι μοναδικό.	
48. Αν μια συνάρτηση f έχει όριο στο x_0 , τότε το x_0 πρέπει να ανήκει στο πεδίο ορισμού της.	

49. Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σ' ένα διάστημα της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ και έχει όριο στο x_0 , τότε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ είναι ανεξάρτητο των άκρων α και β .	
50. Αν μια συνάρτηση f έχει όριο στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$	
51. Το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 - 2}$ είναι καλώς ορισμένο.	
52. Το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x$ είναι καλώς ορισμένο.	
53. Το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(-x^2 + 1)$ είναι καλώς ορισμένο.	
54. Ισχύει η ισοδυναμία: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - l) = 0$	
55. Ισχύει η ισοδυναμία: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = l$	
56. Για μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ ισχύει η ισοδυναμία: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$	
57. Για μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ ισχύει η ισοδυναμία: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$	
58. Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και $f(x) \geq 0$ κοντά στο x_0 τότε $\sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[3]{f(x)}$	
59. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .	
60. Αν $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, τότε κατ' ανάγκη είναι και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$.	
61. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.	
62. Αν $f(x) > 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ τότε κατ' ανάγκη $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 2$.	
63. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \mu$ και $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0 τότε απαραίτητα είναι $\lambda < \mu$.	
64. Έστω οι συναρτήσεις f, g, h με $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$. Τότε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ δεν υπάρχει.	
65. Αν $f(x) \leq \frac{2}{x^2}$, για $x > 0$ τότε απαραίτητα $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$	

66. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $ \eta\mu x < x $	
67. Για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει: $ \eta\mu x < x $	
68. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $ \eta\mu x \leq x $	
69. Ισχύει: $ \eta\mu x = x \Leftrightarrow x = 0$	
70. Ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 1$	
71. Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + g(x))$ τότε απαραίτητα είναι ίσο με $f(2) + g(2)$.	
72. Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) \cdot g(x))$ τότε απαραίτητα ισούται με $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 2} g(x)$	
73. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ τότε είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -l$.	
74. Ισχύει η ισοδυναμία: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$	
75. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = l \in \mathbb{R}$ τότε μπορεί $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq 0$	
76. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$	
77. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 .	
78. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = +\infty$,	
79. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$.	
80. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$	
81. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) g(x) = 0$.	
82. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = -1$	
83. Αν $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ τότε και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$.	
84. Το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2\nu+1}}$ δεν υπάρχει. ($\nu \in \mathbb{N}$)	
85. Ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2\nu}} = +\infty$ ($\nu \in \mathbb{N}^*$)	
86. Ισχύει: $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^\nu = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \nu \text{ άρτιος} \\ -\infty, & \text{αν } \nu \text{ περιττός} \end{cases}$ ($\nu \in \mathbb{N}^*$)	
87. Ισχύει: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^\nu} = 0$ ($\nu \in \mathbb{N}^*$)	

88. Αν $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ πολυωνυμική συνάρτηση με $a_n \neq 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (a_n x^n)$	
89. Αν $f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{\beta_k x^k + \beta_{k-1} x^{k-1} + \dots + \beta_0}$, $a_n, \beta_k \neq 0$, ρητή συνάρτηση τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a_n x^n}{\beta_k x^k} \right)$	
90. Ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$ για $a > 1$	
91. Ισχύει: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$ για $0 < a < 1$	
92. Αν $0 < a < 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$	
93. Αν $a > 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$	
94. Ισχύει: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 1$	
95. Ισχύει: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \eta \mu \frac{1}{x} \right) = 1$	
Συνέχεια Συνάρτησης – Θεωρήματα Συνεχών Συναρτήσεων	
96. Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) και τα όρια $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$ είναι πραγματικοί αριθμοί.	
97. Αν f συνεχής στο 1 και $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$, τότε απαραίτητα $f(1) = 2$.	
98. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 τότε μπορεί το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$.	
99. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0 τότε και η σύνθεση τους $g \circ f$ θα είναι απαραίτητα συνεχής στο x_0 .	
100. Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Τότε η συνάρτηση $h = 2f + g + f \cdot g + \sqrt{ f }$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.	
101. Το θεώρημα Ενδιαμέσων τιμών αποτελεί γενίκευση του θεωρήματος Bolzano.	
102. Μια συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα τα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.	
103. Αν για μια συνάρτηση $f: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $f(a)f(\beta) < 0$ τότε απαραίτητα υπάρχει ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ έτσι ώστε $f(\xi) = 0$.	
104. Αν για μια συνεχή συνάρτηση $f: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $f(a)f(\beta) > 0$ τότε η f δεν μπορεί να μηδενίζεται στο $[\alpha, \beta]$.	
105. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ με $f(a) < 0$ και υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(\xi) = 0$ τότε κατ' ανάγκη $f(\beta) > 0$.	

106.	Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι πάντοτε διάστημα.	
107.	Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ διατηρεί απαραίτητα σταθερό πρόσημο.	
108.	Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό τότε διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ .	
109.	Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε πρέπει να είναι θετική για κάθε x στο Δ .	
110.	Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $f(1) > 0$ τότε απαραίτητα και $f(-2) > 0$.	
111.	Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα (α, β) με $f(\alpha) = -1$ και $f(\beta) = 1$ τότε απαραίτητα υπάρχει ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(\xi) = 0$.	
112.	Αν η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f απαραίτητα παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m .	
113.	Αν μια συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ δεν είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ τότε δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$.	
114.	Αν μια συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ παίρνει όλες τις ενδιάμεσες τιμές μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ τότε είναι απαραίτητα συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.	
115.	Αν η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, τότε έχει πάντοτε ολικά ακρότατα.	
116.	Μια συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση f στο διάστημα (α, β) , δεν έχει ολικά ακρότατα.	
117.	Υπάρχει συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $[1, 2]$ και σύνολο τιμών το $(1, 2)$.	
118.	Αν μια συνάρτηση έχει μέγιστο το 4 και ελάχιστο το 1 τότε το σύνολο τιμών της υποχρεωτικά είναι το $[1, 4]$.	
119.	Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, $\xi \in (\alpha, \beta)$ και $f(\xi) = 0$. Τότε απαραίτητα ισχύει ότι $f(\alpha)f(\beta) < 0$.	
120.	Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο $[\alpha, \beta]$. Αν $f(\alpha)f(\beta) > 0$, η C_f μπορεί να τέμνει τον $x'x$ στο (α, β) .	
121.	Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[-1, 1]$ και $f(-1) = 2$ και $f(1) = 3$. Τότε υπάρχει $\alpha \in (-1, 1)$ τέτοιο ώστε $f(\alpha) = e$.	
122.	Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο $[-1, 1]$ και $f(-1) = 2$ και $f(1) = 4$. Τότε απαραίτητα υπάρχει $\alpha \in (-1, 1)$ τέτοιο ώστε $f(\alpha) = \pi$.	

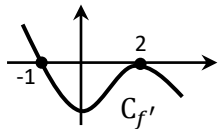
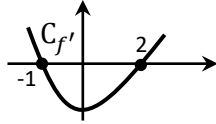
123. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $[\alpha, \beta]$ και συνεχής στο $(\alpha, \beta]$ τότε η f παίρνει πάντοτε στο $[\alpha, \beta]$ μέγιστη τιμή.	
124. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο διάστημα $(\alpha, \beta]$, τότε το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $\left(\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x), f(\beta)\right)$.	
125. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A, B) , όπου $A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x)$ και $B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$.	
126. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 1 = f(4)$ και $f(3) = -2$. Τότε η f	i. έχει $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -2$
	ii. έχει δυο ρίζες ακριβώς
	iii. έχει σύνολο τιμών το $[-2, 1]$
Παράγωγος	
127. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της αν το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ υπάρχει.	
128. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Τότε μπορεί το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$.	
129. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Τότε $\frac{df(x_0)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}$	
130. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Τότε $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow x_0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.	
131. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της αν και μόνο αν υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα όρια: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$	
132. Η στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού (που κινείται σε ευθύγραμμο άξονα) τη χρονική στιγμή t_0 , είναι η παράγωγος της συνάρτησης θέσης $x = S(t)$ τη χρονική στιγμή t_0 .	
133. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0 τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .	
134. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , δεν είναι συνεχής στο x_0 .	

135. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 \in D_f$ τότε κατ' ανάγκη είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .	
136. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε η f' είναι απαραίτητα συνεχής στο x_0 .	
137. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 \in D_f$ τότε η C_f δέχεται πάντοτε εφαπτομένη στο $A(x_0, f(x_0))$.	
138. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$, δεν έχει άλλα κοινά σημεία με τη C_f , εκτός του A .	
139. Ισχύει: $(a^x)' = x \cdot a^{x-1}, 0 < a \neq 1$.	
140. Ισχύει: $(x^x)' = x \cdot x^{x-1}$ για κάθε $x > 0$.	
141. Ισχύει: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, για $x \neq 0$	
142. Η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$ είναι παραγωγίσιμη στο $A = \mathbb{R} - \{x \sigma\upsilon\nu x = 0\}$ με $f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$	
143. Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{4x}}$.	
144. Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$.	
145. Για κάθε $x \neq 0$ ισχύει: $-\frac{1}{x^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$	
146. Ισχύει: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{\pi+h} - a^\pi}{h} = a^\pi \cdot \ln a$ για $0 < a \neq 1$	
147. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 = 1$ τότε απαραίτητα και η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.	
148. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 τότε απαραίτητα και η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .	
149. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0) \neq 0$ τότε και η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f(x_0)g'(x_0) - f'(x_0)g(x_0)}{g^2(x_0)}$	
150. Ο συντελεστής διεύθυνσης λ , της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(a, f(a))$ είναι $\lambda = f'(a)$, εφόσον η f παραγωγίζεται στο a .	

151.	Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της παραγωγίσιμης συνάρτησης f στο σημείο $A(\alpha, f(\alpha))$ σχηματίζει 45° γωνία με τον $x'x$, τότε ισχύει $f'(\alpha) = 1$.	
152.	Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 τότε η $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$	
153.	Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$ τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$	
154.	Αν η συνάρτηση $u = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη τότε ισχύει: $(e^u)' = e^u$	
155.	Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας v ενός κινητού ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0 , λέγεται επιτάχυνση του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 .	
Θεώρημα Rolle – Θ.Μ.Τ.		
156.	Το θεώρημα του Rolle είναι ειδική περίπτωση του θεωρήματος της Μέσης Τιμής.	
157.	Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$ και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (1, 2)$ τότε $f(1) \neq f(2)$.	
158.	Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[1, 2]$ και $f(1) = f(2)$ τότε η γραφική παράσταση της f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.	
159.	Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1, 2]$, παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$ και υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$, τότε υποχρεωτικά $f(1) = f(2)$.	
160.	Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ και δεν είναι 1-1 στο Δ , τότε υπάρχει $\alpha \in \Delta$ στο οποίο η C_f να δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.	
161.	Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1, 2]$, παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$ και $f(1) = f(2)$ τότε υπάρχει ακριβώς ένα $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.	
162.	Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $(\alpha - \beta)f'(\xi) = f(\alpha) - f(\beta)$	
163.	Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) < f(\beta)$ τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) > 0$.	

164.	Δίνεται γνησίως μονότονη και παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Τότε δεν υπάρχει κανένα διάστημα $[\alpha, \beta]$, ώστε να ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle.	
165.	Δίνεται συνεχής συνάρτηση f στο $[1,2]$, παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ και ισχύει ότι $f(1) = 1, f(2) = 2$. Τότε υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης C_f της f με τετμημένη στο $(1,2)$, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f να είναι παράλληλη στη διχοτόμο του 1 ^{ου} – 3 ^{ου} τεταρτημορίου.	
166.	Δίνονται f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμες στο (α, β) με $f(\alpha) = g(\alpha)$ και $f(\beta) = g(\beta)$. Τότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε στα σημεία $A(x_0, f(x_0))$ και $B(x_0, g(x_0))$, οι εφαπτομένες των C_f και C_g αντίστοιχα, να είναι παράλληλες.	
Συνέπειες ΘΜΤ		
167.	Έστω συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ . Αν $f'(x) = 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι σταθερή στο Δ .	
168.	Έστω συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ . Αν $f'(x) = 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι απαραίτητα σταθερή στο Δ .	
169.	Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x) = g'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$. Τότε υπάρχει μοναδική σταθερά c τέτοια ώστε να ισχύει: $f(x) = g(x) + c$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.	
170.	Έστω συναρτήσεις f, g συνεχείς στο διάστημα Δ και $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό $x \in \Delta$. Τότε απαραίτητα ισχύει ότι $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.	
171.	Έστω συναρτήσεις f, g συνεχείς στο διάστημα Δ και $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό $x \in \Delta$. Τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε να ισχύει $f(x) + c = g(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.	
172.	Έστω συναρτήσεις f, g συνεχείς στο διάστημα Δ και $f'(x) > g'(x)$ για κάθε εσωτερικό $x \in \Delta$. Τότε απαραίτητα υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε να ισχύει $f(x) > g(x) + c$ για κάθε $x \in \Delta$.	
173.	Αν $f'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε $f(x) = ce^x$, όπου c σταθερά, και αντίστροφα.	
174.	Έστω συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ , παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ και γνησίως φθίνουσα στο Δ . Τότε υποχρεωτικά είναι $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ .	
175.	Έστω συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ . Αν $f'(x) > 1$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το διάστημα Δ .	

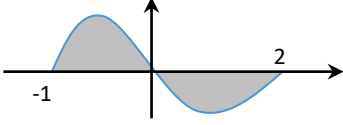
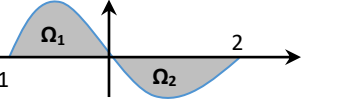
176. Έστω συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ . Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι απαραίτητα γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ .	
177. Αν $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και f' συνεχής στο $\mathbb{R}$ τότε η f είναι κατ' ανάγκη γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$.	
Τοπικά Ακρότατα – Θεώρημα Fermat	
178. Ένα κρίσιμο σημείο είναι απαραίτητα θέση τοπικού ακροτάτου.	
179. Η θέση ενός τοπικού ακροτάτου είναι απαραίτητα κρίσιμο σημείο.	
180. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $[\alpha, \beta]$, το α μπορεί να είναι κρίσιμο σημείο.	
181. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x) = (x-1)^2(x-2)$, $x \in \mathbb{R}$, παρουσιάζει ακρότατο στο 1.	
182. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα $\Delta = (\alpha, \beta)$ και $x_0 \in \Delta$. Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) τότε το $f(x_0)$ είναι πάντοτε τοπικό μέγιστο της f .	
183. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα $\Delta = (\alpha, \beta)$ με εξαίρεση ίσως ένα σημείο $x_0 \in \Delta$ στο οποίο η f είναι όμως συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .	
184. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα $\Delta = (\alpha, \beta)$. Αν $f'(x) \neq 0$ στο (α, β) τότε η f δεν έχει ακρότατα.	
185. Για κάθε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει ακρότατα ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.	
186. Ένα τοπικό μέγιστο μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο.	
187. Κάθε συνάρτηση που έχει τοπικό μέγιστο, θα έχει και ολικό.	
188. Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα μιας συνάρτησης είναι πάντοτε το ολικό μέγιστο.	
189. Αν μια συνάρτηση παρουσιάζει ολικό ελάχιστο τότε αυτό θα είναι το μικρότερο από τα τοπικά της ελάχιστα.	
190. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ . Τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ στα οποία η f' είναι διαφορετική από το μηδέν, δεν είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων.	
191. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.	

Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) .		
192. Βλέπετε την γραφική παράσταση της $f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $f(-1) = 0$ τότε		i. η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1, +\infty)$.
		ii. η f έχει δυο ακρότατα.
		iii. $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
193. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta)$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε η f δεν έχει ακρότατα.		
194. Αν το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το $(1, 4)$, τότε η f δεν έχει ακρότατα.		
195. Έστω συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ . Αν η f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα εσωτερικό σημείο x_0 του Δ και $f'(x_0) = 0$ τότε η f παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο x_0 .		
196. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και $x_0 \in [\alpha, \beta]$. Αν το x_0 είναι θέση τοπικού ακροτάτου τότε πάντοτε $f'(x_0) = 0$.		
197. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν υπάρχει σημείο $A(x_0, f(x_0))$ της C_f του οποίου η απόσταση από τον άξονα $x'x$ είναι μέγιστη (ή ελάχιστη) τότε σε αυτό το σημείο η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη στο άξονα $x'x$.		
Κυρτότητα – Σημεία Καμψής		
198. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 . Αν η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) , ή αντιστρόφως, τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι υποχρεωτικά σημείο καμψής της γραφικής παράστασης της f .		
199. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα (α, β) και $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Αν η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 και ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$, τότε το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμψής.		
200. Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμψής της γραφικής παράστασης της παραγωγίσιμης στο $\mathbb{R}$ συνάρτησης f τότε υποχρεωτικά $f''(x_0) = 0$.		
201. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση της f' φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Τότε η f είναι κυρτή.		
202. Αν $A(x_0, f(x_0))$ σημείο καμψής μιας συνάρτησης f , τότε το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της f .		

203.	Αν μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.	
204.	Στα σημεία καμψής η εφαπτομένη της συνάρτησης διαπερνά την καμπύλη της.	
205.	Αν η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα Δ τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ , βρίσκεται κάτω από την γραφική παράσταση της f με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.	
206.	Αν η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα Δ τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της f .	
Ασύμπτωτες – Κανόνες DLH		
207.	Αν $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$, και $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$ τότε η ευθεία $x = 1$ δεν είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f .	
208.	Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, τότε η C_f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.	
209.	Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσο του 2 έχουν ασύμπτωτες.	
210.	Οι ρητές συναρτήσεις $\frac{P(x)}{Q(x)}$, με βαθμό του αριθμητή $P(x)$ μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του παρονομαστή, έχουν πάντοτε πλάγιες ασύμπτωτες.	
211.	Οι ρητές συναρτήσεις $\frac{P(x)}{Q(x)}$, με βαθμό του αριθμητή $P(x)$ μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του παρονομαστή, δεν έχουν ποτέ ασύμπτωτες.	
212.	Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x - \beta] = 0$, τότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.	
213.	Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $[1,3]$ μπορεί να έχει ασύμπτωτες.	
214.	Η κατακόρυφη ασύμπτωτη μιας συνάρτησης f μπορεί να έχει κοινά σημεία με τη C_f .	
215.	Αν η ευθεία $(\epsilon): y = \lambda x + \beta$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f μιας συνάρτησης f , τότε η (ϵ) δεν μπορεί να έχει κοινά σημεία με την C_f .	

216. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, όπου $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, τότε πάντοτε ισχύει: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$	
217. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, με $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$	
Ολοκλήρωμα	
218. Αν F είναι μια παράγουσα της συνάρτησης f στο διάστημα Δ, τότε όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ.	
219. Το $\int_{-2}^2 \frac{x}{x-1} dx$ είναι καλώς ορισμένο.	
220. Ισχύει $\int_2^1 2x dx = [x^2]_2^1 = 2^2 - 1^2 = 3$	
221. Ισχύει: αν $\alpha = \beta$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0$	
222. Ισχύει: αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0$ τότε υποχρεωτικά $\alpha = \beta$	
223. Ισχύει: αν $\alpha < \beta$ και $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0$ τότε υποχρεωτικά $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.	
224. Ισχύει: αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0$ τότε υποχρεωτικά $\alpha = \beta$ ή αν $\alpha \neq \beta$ τότε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ (ή $[\beta, \alpha]$)	
225. Ισχύει: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx = 0$ με f συνεχής	
226. Ισχύει: $\int_{\alpha}^{\beta} [2f(x) + 3g(x)] dx = 2 \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + 3 \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$, όπου f, g συνεχείς	
227. Ισχύει πάντοτε: $\int_{\alpha}^{\beta} [f(x) \cdot g(x)] dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \cdot \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$	
228. Αν $\alpha < \beta$ και $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0$ τότε πάντα $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$.	
229. Το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} c dx, (\alpha < \beta)$ εκφράζει πάντοτε το εμβαδόν του ορθογωνίου με βάση $\beta - \alpha$ και ύψος c.	
230. Αν $c > 0, \alpha < \beta$ το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} c dx$, εκφράζει το εμβαδόν του ορθογωνίου με βάση $\beta - \alpha$ και ύψος c.	
231. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \Delta$ τότε απαραίτητα είναι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0$ με $\alpha, \beta \in \Delta$.	
232. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και για κάθε $x \in [a, \beta]$ ισχύει $f(x) \geq 0$ τότε απαραίτητα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0$.	

233. Δίνονται συναρτήσεις f, g συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$. Αν $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$	
234. Για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει: $\int_{-\alpha}^{\alpha} (x^4 + 1)dx < \int_{-\alpha}^{\alpha} (x^4 + x^2 + 1)dx$	
235. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και για κάθε $x \in [a, \beta]$ ισχύει $f(x) \geq 0$. Αν υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(\xi) \neq 0$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$.	
236. Δίνονται συναρτήσεις f, g συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$. Αν $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, και υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) > g(\xi)$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$.	
237. Αν $\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 g(x)dx$ τότε πάντοτε $f(x) = g(x)$ για $x \in [1, 2]$.	
238. Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$ και η συνεχής f δεν είναι παντού μηδέν στο $[\alpha, \beta]$ τότε η f παίρνει τουλάχιστον δυο ετερόσημες τιμές.	
239. Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$ και f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε $f(\xi) = 0$ για κάποιο $\xi \in [\alpha, \beta]$.	
240. Έστω f, g' συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(u)du$ όπου $u = g(x)$.	
241. Ισχύει πάντοτε: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx$ όπου f', g' συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$.	
242. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ και α, β σημεία του Δ τότε $\left(\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt\right)' = 0$	
243. Ισχύει: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$ όπου f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$.	
244. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε: $\int_{\beta}^{\alpha} f(t)dt = G(\alpha) - G(\beta)$.	
245. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τις ευθείες $x = \alpha, x = \beta$, τον άξονα $x'x$ και τη γραφική παράσταση της f είναι $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$.	
246. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τις ευθείες $x = \alpha, x = \beta$, τον άξονα $x'x$ και τη γραφική παράσταση της f είναι $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$.	

247. Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου είναι $\int_{-1}^0 f(x)dx + \int_0^2 f(x)dx$	
248. Με βάση το διπλανό σχήμα αν $E(\Omega_1) = 3$ και $E(\Omega_2) = 4$, το $\int_{-1}^2 f(x)dx = 7$	
249. Το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον $x'x$ μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον $x'x$.	
250. Το $\int_{-2}^4 (x+1)dx$ εκφράζει το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = -2$ και $x = 4$.	

Αντιπαράδειγματα και ισχυρισμοί

Α' Μέρος: Ισχύει το αντίστροφο σε καθένα από τα παρακάτω Θεωρήματα;

1. Θεώρημα: Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

Ισχυρισμός: «Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 τότε ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$.»

Απάντηση: Λάθος, είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq 0$. Αν $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x \neq 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$, τότε ισχύει $f(x) > 0$ κοντά στο 0 αλλά $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$.

2. Θεώρημα: Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0 τότε υπάρχει και το $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$ και ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

Ισχυρισμός: «Αν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$ τότε αυτό είναι ίσο με $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.»

Απάντηση: Λάθος. Αν $f(x) = \frac{2}{x^2-1}$ και $g(x) = -\frac{1}{x-1}$ κοντά στο $x_0 = 1$ τότε,
 $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2-1} + \frac{-1}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1-x}{x^2-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{-1}{x+1} \right) = -\frac{1}{2}$ αλλά κανένα από τα όρια $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ δεν υπάρχει.

Ανάλογα συμπεράσματα ισχύουν και για τις άλλες πράξεις με τα όρια.

3. Θεώρημα Bolzano

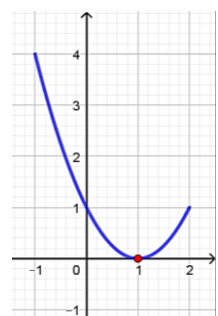
Ισχυρισμός 1: «Αν μια συνεχής συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ έχει ρίζα $\rho \in (\alpha, \beta)$ τότε $f(\alpha)f(\beta) < 0$.»

Απάντηση: Λάθος. Η συνάρτηση $f(x) = (x-1)^2$, $x \in [-1, 2]$ έχει ρίζα το 1, αφού $f(1) = 0$ αλλά $f(-1)f(2) > 0$.

Ισχυρισμός 2: «Αν μια συνεχής συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $f(\alpha)f(\beta) > 0$, τότε δεν έχει ρίζα στο $[\alpha, \beta]$.»

Απάντηση: Λάθος. Δείτε την συνάρτηση του ισχυρισμού 1.

Γενικά με την συνθήκη $f(\alpha)f(\beta) > 0$ δεν έχουμε κανένα συμπέρασμα για τις ρίζες της f στο $[\alpha, \beta]$.

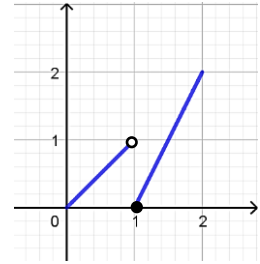


4. Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών

Ισχυρισμός: « Αν μια συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ μπορεί να πάρει όλες τις ενδιάμεσες τιμές μεταξύ του $f(a)$ και $f(b)$ τότε η f πρέπει να είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$. »

Απάντηση: Λάθος. Η $f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } 0 \leq x < 1 \\ 2x - 2, & \text{αν } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ του $f(0) = 0$ και $f(2) = 2$ αλλά δεν συνεχής στο $[0, 2]$, συγκεκριμένα στο 1.



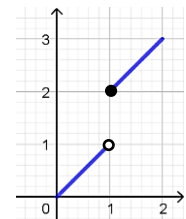
5. Θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής.

Ισχυρισμός: « Αν μια συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ έχει μέγιστο M και ελάχιστο m τότε είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$. »

Απάντηση: Λάθος. Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } 0 \leq x < 1 \\ x + 1, & \text{αν } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

έχει μέγιστο το 3 και ελάχιστο το 0 αλλά δεν είναι συνεχής στο $[0, 2]$ συγκεκριμένα στο 1.

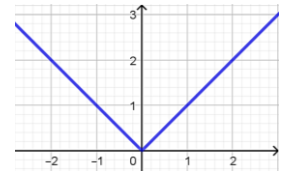
Παρατηρείστε επίσης ότι το σύνολο τιμών της f , δεν είναι το $[0, 3]$ παρ' όλο που η μέγιστη τιμή της f είναι $M = 3$ και η ελάχιστη τιμή $m = 0$.

6. Θεώρημα: Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο x_0 .

Ισχυρισμός: « Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της τότε είναι και παραγωγίσιμη σ' αυτό. »

Απάντηση: Λάθος. Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι συνεχής στο 0 αλλά όχι παραγωγίσιμη στο 0 αφού,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1 \quad \text{ενώ} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$



7. Θεώρημα Rolle

Ισχυρισμός: « Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και υπάρχει $\rho \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε $f'(\rho) = 0$ τότε είναι $f(\alpha) = f(\beta)$. »

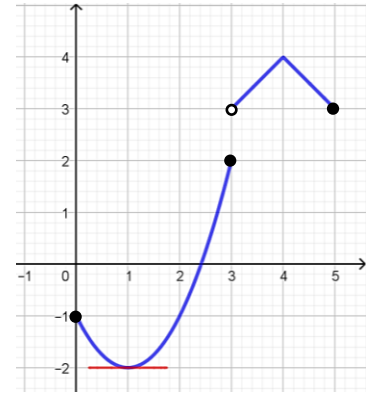
Απάντηση: Λάθος. Για την συνάρτηση $f_1(x) = (x - 1)^2 - 2$, $x \in [0, 3]$ είναι $f'_1(1) = 0$ αλλά $f_1(0) \neq f_1(3)$.

Γενικότερα, δείτε την συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 - 2, & \text{αν } 0 \leq x \leq 3 \\ x, & \text{αν } 3 < x \leq 4 \\ -x + 8, & \text{αν } 4 < x \leq 5 \end{cases}$$

είναι $f'(1) = 0$ αλλά δεν ισχύει καμία υπόθεση του Θεωρήματος Rolle στο $[0,5]$ αφού

- δεν είναι συνεχής στο $[0,5]$, συγκεκριμένα στο $x_1 = 3$.
- δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0,5)$, συγκεκριμένα στο $x_2 = 4$.
- δεν ισχύει $f(0) = f(5)$.



8. Θεώρημα Μέσης τιμής

Ισχυρισμός: «Έστω συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$. Τότε η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) .»

Απάντηση: Λάθος. Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 - 2, & \text{αν } 0 \leq x \leq 3 \\ x, & \text{αν } 3 < x \leq 4 \\ -x + 8, & \text{αν } 4 < x \leq 5 \end{cases}$ όπως είδαμε πριν δεν είναι συνεχής στο $[0,5]$, ούτε παραγωγίσιμη στο $(0,5)$ αλλά υπάρχει $\xi \in (0,5)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{3 - (-1)}{5} = \frac{4}{5}$, συγκεκριμένα το $\xi = \frac{7}{5}$.

9. Θεώρημα:

Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ . Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ .

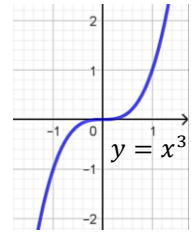
Ισχυρισμός: «Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ τότε ισχύει $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ .»

Απάντηση: Λάθος. Η συνάρτηση $f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ αφού για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $x_1^3 < x_2^3 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, αλλά δεν ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ καθώς $f'(0) = 0$.

10. Θεώρημα Fermat

Ισχυρισμός 1: « Δίνεται συνάρτηση f και εσωτερικό $x_0 \in D_f$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$. Τότε το x_0 είναι απαραίτητα θέση τοπικού ακροτάτου.»

Απάντηση: Λάθος. Είναι πιθανό ακρότατο. Η συνάρτηση $f(x) = x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ όπως δείξαμε στο (9). Είναι $f'(0) = 0$ αλλά η f δεν έχει ακρότατα καθώς είναι γνησίως αύξουσα σ' ένα ανοικτό διάστημα.



Ισχυρισμός 2: « Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 \in D_f$ τότε πάντοτε $f'(x_0) = 0$. »

Απάντηση: Λάθος. Η συνάρτηση $f(x) = x + 1, x \in [0,1]$, είναι γνησίως αύξουσα και το $f(0) = 1$ είναι ελάχιστο αλλά $f'(0) = 1 \neq 0$.

Επίσης, η συνάρτηση $f(x) = |x|$ παρουσιάζει ελάχιστο στο 0, το $f(0) = 0$ αφού είναι $f(x) = |x| \geq 0 = f(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όμως δεν υπάρχει η παράγωγος της f στο 0!

Συμπέρασμα: Στο Θεώρημα Fermat είναι σημαντικό το x_0 που παρουσιάζεται το ακρότατο, να είναι εσωτερικό και η συνάρτηση να παραγωγίζεται σε αυτό.

Ισχυρισμός 3: « Αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η f δεν έχει ακρότατα. »

Απάντηση: Σωστό αν το Δ είναι ανοικτό διάστημα. Αφού αν το x_0 είναι θέση τοπικού ακροτάτου τότε από το Θ. Fermat είναι $f'(x_0) = 0$, άτοπο.

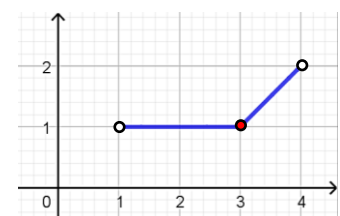
Αν όμως το Δ δεν είναι ανοικτό, τότε π.χ. για την συνάρτηση $f(x) = x + 1, x \in [1,2)$ είναι $f'(x) = 1 \neq 0$ για $x \in [1,2)$, αλλά η f παρουσιάζει ελάχιστο στο 1, το $f(1) = 2$ αφού $f(x) \geq f(1)$ για κάθε $x \in [1,2)$.

11. Θεώρημα: Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .

Ισχυρισμός: « Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 στο οποίο όμως είναι συνεχής. Αν στο x_0 η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x_0 , τότε στο (α, x_0) η f είναι γνησίως φθίνουσα και στο (x_0, β) είναι γνησίως αύξουσα. »

Απάντηση: Λάθος.

Η $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } 1 < x \leq 3 \\ x - 2, & \text{αν } 3 < x < 4 \end{cases}$, στο 3 είναι συνεχής, παραγωγίσιμη στο $(1,3)$ και $(3,4)$ και στο 3 παρουσιάζει ελάχιστο το $f(3) = 1$. Όμως στο $(1,3)$ δεν είναι γνησίως φθίνουσα.



12. Θεώρημα: Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κυρτή στο Δ .

Ισχυρισμός: «Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Αν η f είναι κυρτή στο Δ τότε $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ .»

Απάντηση: Λάθος. Η συνάρτηση $f(x) = x^4$, έχει $f'(x) = 4x^3$ που είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα f κυρτή στο $\mathbb{R}$. Όμως δεν ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αφού $f''(0) = 0$.

13. Θεώρημα: Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x_0) = 0$.

Ισχυρισμός: « Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$ είναι $f''(x_0) = 0$. Τότε απαραίτητα το $(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f .»

Απάντηση: Λάθος. Είναι πιθανό σημείο καμπής. Η συνάρτηση $f(x) = x^4$ έχει $f''(0) = 0$, αλλά δεν έχει σημεία καμπής αφού είναι κυρτή (δες το 12).

14. Κανόνες De L Hospital.

Ισχυρισμός: «Αν δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ τότε δεν υπάρχει και το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$.»

Απάντηση: Λάθος. Για παράδειγμα αν $g(x) = x$ και $f(x) = x^2 \eta \mu \frac{1}{x}, x \neq 0$,

το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ υπάρχει ενώ το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ δεν υπάρχει.

15. Θεώρημα: Έστω f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και η f δεν είναι παντού μηδέν στο $[\alpha, \beta]$ τότε ισχύει ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$.

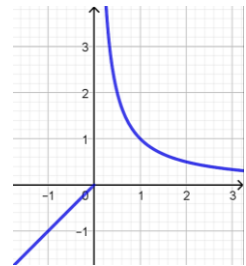
Ισχυρισμός: «Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$ και $\alpha < \beta$ τότε $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.»

Απάντηση: Λάθος. Η $f(x) = 2x, x \in [-1, 2]$ έχει $\int_{-1}^2 f(x) dx = 3 > 0$ αλλά $f(-1) = -2 < 0$.

B' Μέρος: Επιπλέον ισχυρισμοί ...

- 16. Ισχυρισμός:** «Υπάρχουν 1-1 συναρτήσεις που δεν είναι γνησίως μονότονες»

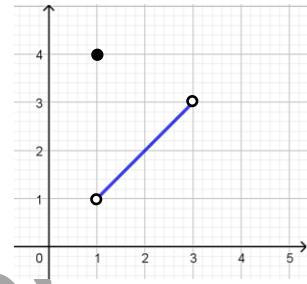
Απάντηση: Σωστό. Για παράδειγμα η $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{αν } x > 0 \\ x, & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$ είναι 1-1, αλλά όχι γνησίως μονότονη.



- 17. Ισχυρισμός:** «Δίνεται η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. Τότε πάντα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta)$.»

Απάντηση: Λάθος. Αν η f ήταν συνεχής στο α , θα ήταν σωστό. Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 4, & \text{αν } x = 1 \\ x, & \text{αν } 1 < x < 3 \end{cases}$ έχει

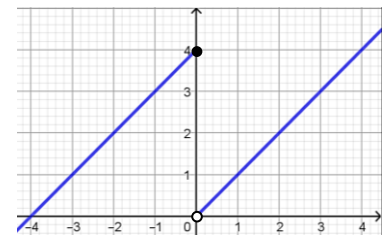
$f'(x) = 1 > 0$ για $x \in (1, 3)$, όμως δεν είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, 3)$ αφού για $x_1 = 1$ και $x_2 = 2$ είναι $x_1 < x_2$ αλλά $f(x_1) > f(x_2)$.



- 18. Ισχυρισμός:** «Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$ και στο $(0, +\infty)$. Τότε η f είναι απαραίτητα γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}$.»

Απάντηση: Λάθος. Αν $f(x) = \begin{cases} x + 4, & \text{αν } x \leq 0 \\ x, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$, τότε είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$ και στο

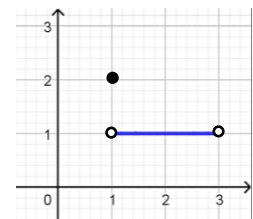
$(0, +\infty)$ αλλά όχι στην ένωση $(-\infty, 0] \cup (0, +\infty) = \mathbb{R}$, αφού για $x_1 = 0$ και $x_2 = 1$ ισχύει $x_1 < x_2$ αλλά $f(x_1) = 4 > 1 = f(x_2)$. Παρατηρείστε ότι αν η f ήταν συνεχής στο 0, τότε θα ήταν γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}$.



- 19. Ισχυρισμός:** «Δίνεται συνάρτηση $f: [\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. Τότε η f είναι υποχρεωτικά σταθερή στο $[\alpha, \beta)$.»

Απάντηση: Λάθος. Αν η f ήταν συνεχής στο α , θα ήταν σωστό. Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2, & \text{αν } x = 1 \\ 1, & \text{αν } 1 < x < 3 \end{cases}$ έχει

$f'(x) = 0$ για $x \in (1, 3)$ αλλά δεν είναι σταθερή στο $[1, 3)$ αφού $f(1) \neq f(2)$.



- 20. Ισχυρισμός:** «Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και $f'(x) = 0$ για κάθε $x \neq 0$. Τότε η f είναι υποχρεωτικά σταθερή στο $\mathbb{R}^*$.»

Απάντηση: Λάθος. Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{αν } x < 0 \\ 1, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$ έχει $f'(x) = 0$ για κάθε $x \neq 0$ αλλά δεν είναι σταθερή στο $\mathbb{R}^*$.

21. Ισχυρισμός: « Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ για την οποία ισχύει $f'(x) = \frac{1}{x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$. Είναι σωστό να γράψουμε, για $x \neq 0$:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow f'(x) = (\ln|x|)' \Leftrightarrow f(x) = \ln|x| + c ; »$$

Απάντηση: Λάθος. Οι συναρτήσεις f και $g(x) = \ln|x|$ είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}^*$ και έχουν ίσες παραγώγους $f'(x) = g'(x)$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Άρα στο διάστημα $\Delta_1 = (-\infty, 0)$ υπάρχει σταθερά c_1 τέτοια ώστε $f(x) = g(x) + c_1$ και στο διάστημα $\Delta_2 = (0, +\infty)$ υπάρχει σταθερά c_2 τέτοια ώστε $f(x) = g(x) + c_2$. Τελικά είναι :

$$f(x) = \begin{cases} g(x) + c_1, & \text{αν } x < 0 \\ g(x) + c_2, & \text{αν } x > 0 \end{cases} \text{ ή } f(x) = \begin{cases} \ln|x| + c_1, & \text{αν } x < 0 \\ \ln|x| + c_2, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

22. Ισχυρισμός: « Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τότε αφού $f^2(x) = 1 \Leftrightarrow (f(x) - 1)(f(x) + 1) = 0$ θα είναι $f(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή $f(x) = -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.»

Απάντηση: Λάθος. Άπειρες συναρτήσεις ικανοποιούν την σχέση $f^2(x) = 1 \Leftrightarrow (f(x) - 1)(f(x) + 1) = 0$ και όχι μόνο οι $f(x) = 1$, $f(x) = -1$. Για παράδειγμα, $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{αν } x \leq 0 \\ 1, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$ ή $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{αν } x \leq 1 \\ 1, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$ κλπ. (παρατηρείστε όμως ότι συνεχείς είναι μόνο οι $f(x) = 1$ και $f(x) = -1$)

Συμπέρασμα: Αν $f(x)g(x) = 0$ για κάθε $x \in \Delta = A_f \cap A_g$, δεν σημαίνει απαραίτητα ότι τουλάχιστον μια εκ των f και g θα είναι η μηδενική στο Δ , όπως συμβαίνει με τους πραγματικούς αριθμούς.

23. Ισχυρισμός 1: « Η γραφική παράσταση μιας πολωνυμικής $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτησης περιττού βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη.»

Απάντηση: Λάθος. Η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x$ έχει $f'(x) = 3x^2 + 1 \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Ισχυρισμός 2: « Η γραφική παράσταση μιας πολωνυμικής συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ άρτιου βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη.»

Απάντηση: Σωστό. Αν η f είναι σταθερή προφανώς ισχύει. Αλλιώς η f' θα είναι πολώνυμο περιττού βαθμού, συνεχής συνάρτηση και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, αν ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου είναι

θετικός (αλλιώς τα όρια αντίστροφα). Άρα η f' έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, και αφού $0 \in \mathbb{R}$, η f' έχει ρίζα.

24. Ισχυρισμός: « Μια πολυωνυμική συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 3^{ου} βαθμού έχει πάντοτε σημείο καμψής.»

Απάντηση: Σωστό. Η f'' είναι πολυώνυμο 1^{ου} βαθμού το οποίο έχει πάντοτε ρίζα ρ , η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του ρ και η C_f δέχεται εφαπτομένη στο $(\rho, f(\rho))$ αφού η f είναι παραγωγίσιμη. Άρα $(\rho, f(\rho))$ σημείο καμψής της C_f .

25. Ισχυρισμός: « Κάθε συνάρτηση f έχει μέγιστο ή ελάχιστο»

Απάντηση: Λάθος, η $y = x^3$ είναι γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}$, επομένως δεν έχει ακρότατα.

26. Ισχυρισμός: « Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν στο x_0 σημείο καμψής τότε και η $h = f \cdot g$ έχει στο x_0 σημείο καμψής.»

Απάντηση: Λάθος, αν $f(x) = x^3$ και $g(x) = x^5$ τότε οι f και g παρουσιάζουν καμψή στο 0 αλλά η $h(x) = x^3 \cdot x^5 = x^8$ δεν παρουσιάζει καμψή στο 0 αφού είναι κυρτή καθώς η $h'(x) = 8x^7$ είναι γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

27. Ισχυρισμός: « Αν $\int_a^b f(x)dx = 0$ τότε υποχρεωτικά $\alpha = \beta$ ή αν $\alpha \neq \beta$ τότε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ (ή $[\beta, \alpha]$)

Απάντηση: Λάθος. Είναι $\int_{-1}^1 4x^3 dx = [x^4]_{-1}^1 = 0$ αλλά η $f(x) = 4x^3$ δεν είναι παντού μηδέν στο $[-1, 1]$ και τα όρια ολοκλήρωσης είναι διαφορετικά.

28. Ισχυρισμός: «Κάθε συνάρτηση ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ έχει όριο.»

Απάντηση: Λάθος, για την $f(x) = \frac{|x|}{x}, x \neq 0$ είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ αλλά $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$, οπότε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ δεν υπάρχει.

29. Ισχυρισμός: « Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = l$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -l$ »

Απάντηση: Λάθος. Η συνάρτηση $f(x) = \frac{|x|}{x}, x \neq 0$ έχει $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = 1$ αλλά το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ δεν υπάρχει.

Αν όμως το $l = 0$ ισχύει:

αν $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ (διότι $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ και εφαρμόζουμε κριτήριο παρεμβολής). Άρα $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

30. Απροσδιοριστίες

Α) Ισχυρισμός:

«Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$ τότε $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + g(x)] = 0$.

Απάντηση: Λάθος, αν $f(x) = \frac{1}{x^2}$ και $g(x) = -\frac{1}{x^2} + 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$ αλλά $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$

Β) Ισχυρισμός:

« Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = 0$

Απάντηση: Λάθος, αν $f(x) = x^4$ και $g(x) = x^3$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ αλλά $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - x^3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty$.

Γ) Ισχυρισμός:

« Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = 1$ ή -1 όπου $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

Απάντηση: Λάθος, αν $f(x) = \frac{1}{x^4}$ και $g(x) = \frac{1}{x^2}$ τότε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$ αλλά $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1/x^4}{1/x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2}{x^4} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

Επίσης,

αν $f(x) = x^4$ και $g(x) = x^3$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ αλλά $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^4}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ ή ακόμη $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{g(x)}{f(x)} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{x^4} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

Δ) Ισχυρισμός:

« Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)g(x)] = 0$ ή $\pm\infty$ όπου $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

Απάντηση: Λάθος, αν $f(x) = \frac{1}{x}$ και $g(x) = x$ τότε $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$ αλλά $\lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)g(x)] = 1$.

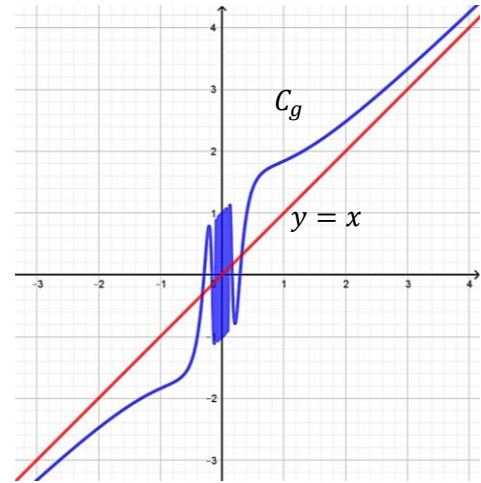
Επίσης, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ αλλά $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)g(x)] = 1$

31. Ισχυρισμός: « Η ασύμπτωτη μιας γραφικής παράστασης f δεν μπορεί να έχει κοινά σημεία με την C_f . »

Απάντηση: Λάθος, αν $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ x, & x \leq 0 \end{cases}$

τότε $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ άρα η $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f και τέμνει την C_f στο $(0,0)$ αφού $f(0) = 0$.

Επίσης η $g(x) = x + \eta\mu \frac{1}{x}$ έχει ασύμπτωτη την $y = x$ η οποία την τέμνει σε άπειρα σημεία. (Σχήμα)



32. Ισχυρισμός: « Μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $[a, \beta]$ δεν μπορεί να έχει ασύμπτωτες »

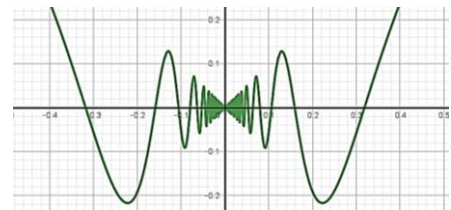
Απάντηση: Λάθος, μπορεί να μην είναι συνεχής σ' ένα σημείο. Η συνάρτηση

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < x \leq 1 \\ x, & -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$ έχει την $x = 0$ κατακόρυφη ασύμπτωτη όπως είδαμε.

33. Ισχυρισμός: « Αν μια συνάρτηση ορισμένη σε σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ έχει όριο στο x_0 , τότε κοντά στο x_0 θα είναι γνησίως μονότονη. »

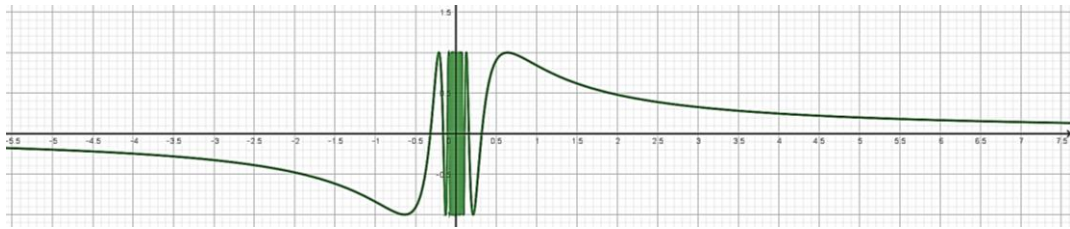
Απάντηση: Λάθος, η $f(x) = \begin{cases} x\eta\mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

έχει $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ αλλά αποδεικνύεται ότι κοντά στο 0 δεν υπάρχει διάστημα $(\alpha, 0)$ ή $(0, \beta)$ στο οποίο να είναι γνησίως μονότονη.



34. Ισχυρισμός: « Αν ένα όριο δεν υπάρχει τότε τα πλευρικά όρια υπάρχουν αλλά είναι διαφορετικά. »

Απάντηση: Λάθος, για την $f(x) = \eta\mu \left(\frac{1}{x}\right)$ - (σχήμα) - δεν υπάρχουν τα πλευρικά όρια $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, αφού είναι γνωστό ότι η $y = \eta\mu x$ δεν έχει όριο στο $\pm\infty$.



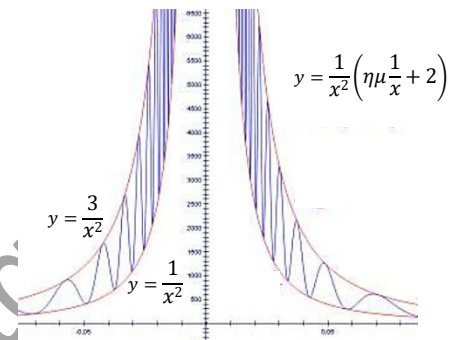
35. Ισχυρισμός: «Αν δυο συναρτήσεις έχουν όριο στο x_0 αλλά δεν είναι ίσες κοντά στο x_0 , τότε δεν μπορεί να έχουν ίσα όρια στο x_0 .»

Απάντηση: Λάθος, π.χ. οι συναρτήσεις $f(x) = x$ και $g(x) = \frac{1}{x}$ δεν είναι ίσες κοντά στο 1, αλλά $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

36. Ισχυρισμός: «Αν το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ δεν είναι

πεπερασμένο τότε, αφού οι τιμές της f απειρίζονται, κοντά στο x_0 η συνάρτηση θα είναι γνησίως μονότονη.»

Απάντηση: Λάθος, δείτε την γραφική παράσταση της C_f όταν $f(x) = \frac{1}{x^2} \left(\eta\mu \frac{1}{x} + 2 \right)$. Κοντά στο 0, οι τιμές απειρίζονται αλλά η μονοτονία δεν διατηρείται.



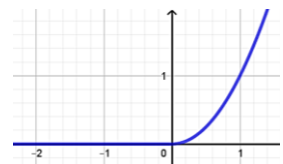
37. Ισχυρισμός: «Αν το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ τότε η συνάρτηση θα είναι γνησίως μονότονη κοντά στο $+\infty$.»

Απάντηση: Λάθος, αν $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη σε μια περιοχή του $+\infty$ (όμοια για το $-\infty$). Βλέπε το παρακάτω σχήμα:



38. Ισχυρισμός: «Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σ' ένα σημείο της $A(\rho, f(\rho))$ δεν έχει άλλα κοινά σημεία με την C_f .»

Απάντηση: Λάθος. Η $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ στο $(0,0)$ έχει $f(0) = f'(0) = 0$ και εφαπτομένη στο $A(0,0)$ την ευθεία $y = 0$, η οποία έχει άπειρα κοινά σημεία με την C_f .



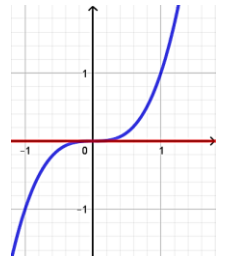
39. Ισχυρισμός: « Αν μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ τότε είναι συνεχής και στο α . »

Απάντηση: Λάθος. Π.χ. αν $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x > 1 \\ \sqrt{x}, & \text{αν } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$ τότε η f είναι συνεχής

στο $[0,1]$ αλλά δεν είναι συνεχής στο 0 αφού $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$.

40. Ισχυρισμός: « Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f δεν μπορεί να διαπερνά την C_f . »

Απάντηση: Λάθος. Η εφαπτομένη της $f(x) = x^3$ στο $A(0,0)$ είναι η $y = 0$ που διαπερνά την C_f .



Επιμέλεια:
Μπαλτσαβιάς Βενέδικτος