Επανάληψη σε βασικές γνώσεις της Άλγεβρας

Α) Ιδιότητες Πράξεων

Ιδιότητα	Πρόσθεση	Πολλαπλασιασμός
Αντιμεταθετική	$\alpha + \beta = \beta + \alpha$	$\alpha\beta = \beta\alpha$
Προσεταιριστική	$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$	$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$
Ουδέτερο Στοιχείο	$\alpha + 0 = \alpha$	$\alpha \cdot 1 = \alpha$
Αντίθετος/Αντίστροφος Αριθμού	$\alpha + (-\alpha) = 0$	$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1,\ \alpha \neq 0$
Επιμεριστική	$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$	

Η αφαίρεση και η διαίρεση ορίζονται αντίστοιχα ως εξής:
$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$ και $\alpha : \beta = \frac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$ όταν $\beta \neq 0$

Ισχύουν επιπλέον:

i. $\left.\begin{matrix} \alpha = \beta \\ \text{και} \\ \gamma = \delta \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha + \gamma = \beta + \delta$, δηλαδή μπορώ να προσθέσω δυο ισότητες κατά μέλη

ii. $\left.\begin{matrix} \alpha = \beta \\ \text{και} \\ \gamma = \delta \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \delta$, δηλαδή μπορώ να πολλαπλασιάσω δυο ισότητες κατά μέλη

iii. $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma$, δηλαδή μπορώ και στα δυο μέλη μιας ισότητας να προσθέσω/αφαιρέσω τον ίδιο αριθμό.

iv. $\alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ ή $\beta = 0$ ενώ
$\alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$

v. Αν $\gamma \neq 0$ τότε $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$

δηλαδή μπορώ να πολλαπλασιάσω/διαιρέσω και τα δυο μέλη μιας ισότητας με τον ίδιο μη μηδενικό αριθμό.
Προσοχή, αν δεν ξέρω ή δεν έχω υποθέσει ότι $\gamma \neq 0$ δεν μπορώ να «διαγράψω» το γ από την ισότητα $\alpha\gamma = \beta\gamma$ αλλά εργάζομαι ως εξής:
$\alpha\gamma = \beta\gamma \Leftrightarrow \alpha\gamma - \beta\gamma = 0 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)\gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha - \beta = 0$ ή $\gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta$ ή $\gamma = 0$

Π.χ. $x^2 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 2$ ενώ

είναι **λάθος** να γράψουμε: $x^2 = 2x \Leftrightarrow \frac{x^2}{x} = \frac{2x}{x} \Leftrightarrow x = 2$

Β) **Δυνάμεις πραγματικών αριθμών**

Ορισμός:	**Ιδιότητες** ($\mu, \nu \in \mathbb{Z}$ και εφόσον ορίζονται…)	
$\alpha^1 = \alpha$ και $\alpha^\nu = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \dots \alpha}_{\nu\ \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\gamma o\nu\tau\varepsilon\varsigma}$ όπου $\nu \in \mathbb{N}, \nu > 1$ και $\alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha^\mu \cdot \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$	$\dfrac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$
Επιπλέον, για $\alpha \neq 0$ ορίζουμε: $\alpha^0 = 1$ και $\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu},\ \nu \in \mathbb{N}$	$(\alpha \cdot \beta)^\nu = \alpha^\nu \cdot \beta^\nu$	$\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^\nu = \dfrac{\alpha^\nu}{\beta^\nu}$
	$(\alpha^\nu)^\mu = \alpha^{\nu \cdot \mu}$	

Παραδείγματα:

$2^3 = 8,\ \ (-2)^3 = -8, \qquad (-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}, \qquad (-2)^4 = 16$ όμως $-2^4 = -16$ διότι $(-2)^4 = (-2)(-2)(-2)(-2) = 16$ ενώ $-2^4 = -2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = -16$
$2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 \quad , \qquad 3^4 \cdot 3^{-6} = 3^{4+(-6)} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$
$(-2)^3 \cdot 2^{-2} = -2^3 \cdot 2^{-2} = -2^{3-2} = -2$ $(-2)^2 \cdot 2^3 = 2^2 \cdot 2^3 = 2^5 = 32$
$\frac{4^3}{4^2} = 4^{3-2} = 4 \quad , \quad \frac{4^3}{4^5} = 4^{3-5} = 4^{-2} = \frac{1}{16}, \qquad \frac{2^3}{2^{-2}} = 2^{3-(-2)} = 2^5$
$(2^2)^3 = 2^{2\cdot 3} = 2^6, \quad (3^{-1})^{-2} = 3^{-1(-2)} = 3^2 = 9$
$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9} \quad , \quad (2 \cdot 3)^{-2} = 2^{-2} \cdot 3^{-2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{36}, \quad \left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{5^3}{2^3} = \frac{125}{8}$

Γ) **Πράξεις Κλασμάτων**

- Πρόσθεση- αφαίρεση (μετατρέπουμε, αν δεν είναι, τα κλάσματα σε ομώνυμα)

$$\overset{3}{\frac{1}{2}} + \overset{2}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} = \frac{7}{6}, \qquad \frac{x}{y} + \frac{2}{x^2} = \frac{x \cdot x^2}{y \cdot x^2} + \frac{2 \cdot y}{y \cdot x^2} = \frac{x^3 + 2y}{yx^2}$$

- Πολλαπλασιασμός (πολλαπλασιάζουμε αριθμητή με αριθμητή και παρονομαστή με παρονομαστή)

$$\frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{20}, \qquad \frac{2x^3}{y^{-2}} \cdot \frac{x^{-2}}{y^4} = \frac{2x^3 \cdot x^{-2}}{y^{-2} \cdot y^4} = \frac{2x^{3-2}}{y^{-2+4}} = \frac{2x}{y^2}$$

- Διαίρεση (αντιστρέφουμε τους όρους του δεύτερου κλάσματος και πολλαπλασιάζουμε)

$$\frac{2}{5} : \frac{7}{10} = \frac{2}{5} \cdot \frac{10}{7} = \frac{20}{35} = \frac{4}{7}, \text{ και για το σύνθετο κλάσμα } \frac{\frac{2}{5}}{\frac{4}{3}} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 4} = \frac{6}{20}$$

$$\frac{x+1}{y^2} : \frac{(x+1)^3}{y^4} = \frac{x+1}{y^2} \cdot \frac{y^4}{(x+1)^3} = \frac{(x+1) \cdot y^4}{y^2 \cdot (x+1)^3} = \frac{y^2}{(x+1)^2} = \left(\frac{y}{x+1}\right)^2$$

ΠΡΟΣΟΧΗ στις απλοποιήσεις π.χ. είναι **ΛΑΘΟΣ:** $\frac{\cancel{2}+8}{\cancel{2}} = 8$ ή $\frac{x+(\cancel{y-1})}{2(\cancel{y-1})} = \frac{x}{2}$

Δ) **Προτεραιότητα πράξεων**

1. Δυνάμεις => 2. Πολλαπλασιασμοί/ διαιρέσεις => 3. Προσθέσεις/ Αφαιρέσεις

(Αν υπάρχουν **παρενθέσεις**, πρώτα εκτελούμε τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις με την παραπάνω σειρά)

$$\text{π.χ.}\quad [32:(-2)^2-3\cdot 5]-\left(-2+\frac{2021^0}{2}\right)\cdot 8-14=$$

$$=(32:4-3\cdot 5)-\left(-2+\frac{1}{2}\right)\cdot 8-14=(8-15)-\left(-\frac{4}{2}+\frac{1}{2}\right)\cdot 8-14$$

$$=-7-\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{8}{1}-14=-7+\frac{24}{2}-14=-7+12-14=-21+12=-9$$

Δ) **Ταυτότητες**

1. $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$	**5**. $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$
2. $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$	**6**. $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$
3. $\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$	**7**. $(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$
4. $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$	**8**. $(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma$

Παραδείγματα

- $\left(\underbrace{2x}_{\alpha}-\underbrace{3}_{\beta}\right)^2=\underbrace{(2x)^2}_{\alpha^2}-2\cdot\underbrace{2x}_{\alpha}\cdot\underbrace{3}_{\beta}+\underbrace{3^2}_{\beta^2}=4x^2-12x+9$ (σύμφωνα με την 2η ταυτότητα)
- $(-x-2)^2=[-(x+2)]^2=(x+2)^2=x^2+2\cdot x\cdot 2+2^2=x^2+4x+4$ (1η ταυτότητα)
  ή $(-x-2)^2=[(-x)-2]^2=(-x)^2-2(-x)2+2^2=x^2+4x+4$ (2η ταυτότητα)
- $4x^2-9y^2=(2x)^2-(3y)^2=(2x-3y)(2x+3y)$, (3η ταυτότητα)
- $27x^3+8=(3x)^3+2^3=(3x+2)[(3x)^2-(3x)\cdot 2+2^2]=(3x+2)(9x^2-6x+4)$ (4η ταυτότητα)
- $(x-2y)^3=x^3-3\cdot x^2\cdot(2y)+3\cdot x\cdot(2y)^2-(2y)^3=x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3$ (7η ταυτότητα)

Ε) **Παραγοντοποίηση**

α) Κοινός παράγοντας
- $x^2-x=x(x-1)$, • $y(x+1)^2+(x+1)^5=(x+1)^2\cdot[y+(x+1)^3]$

β) Ομαδοποίηση
- $x^2+xy+ax+ay=x(x+y)+a(x+y)=(x+a)(x+y)$
- $ax-x+y-ay=x(a-1)+y(1-a)=x(a-1)-y(a-1)=(x-y)(a-1)$

γ) Ταυτότητες
- $x^2-6x+9=x^2-2\cdot 3\cdot x+3^2=(x-3)^2$,
- $16x^2+8xy+y^2=(4x)^2+2\cdot(4x)y+y^2=(4x+y)^2$,
- $x^2-9=x^2-3^2=(x-3)(x+3)$, • $x^2-2=x^2-\left(\sqrt{2}\right)^2=\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)$

δ)Τριώνυμο (στη συνέχεια της ύλης…)

ε) Συνδυασμός
- $2x^2-50=2(x^2-25)=2(x-5)(x+5)$
- $\omega^2-x^2+2x-1=\omega^2-(x^2-2x+1)=\omega^2-(x-1)^2=$
  $=[\omega-(x-1)]\cdot[\omega+(x-1)]=(\omega-x+1)(\omega+x-1)$
- $x^3-x^2-x+1=x^2(x-1)-(x-1)=(x^2-1)(x-1)=(x-1)^2(x+1)$

Μπαλτσαβιάς Βενέδικτος