

5. Αν $\alpha \neq \beta$, να δείξετε ότι είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$ η εξίσωση $(\alpha^2 + \beta^2)x^2 + 2(\alpha + \beta)x + 2 = 0$. Να εξετάσετε την περίπτωση που είναι $\alpha = \beta$.

Λύση.

$$(\alpha^2 + \beta^2)x^2 + 2(\alpha + \beta)x + 2 = 0.$$

$$A = \alpha^2 + \beta^2$$

$$B = 2(\alpha + \beta)$$

$$\Gamma = 2$$

Αρκεί να δείξουμε ότι $\Delta < 0$

$$\Delta = B^2 - 4A\Gamma = [2(\alpha + \beta)]^2 - 4 \cdot (\alpha^2 + \beta^2) \cdot 2$$

$$= (2\alpha + 2\beta)^2 - 8(\alpha^2 + \beta^2)$$

$$= 4\alpha^2 + 2 \cdot 2\alpha \cdot 2\beta + (2\beta)^2 - 8\alpha^2 - 8\beta^2$$

$$= 4\cancel{\alpha^2} + 8\alpha\beta + 4\cancel{\beta^2} - 8\cancel{\alpha^2} - 8\cancel{\beta^2}$$

$$= -4\alpha^2 + 8\alpha\beta - 4\beta^2 = -4(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2)$$

$$= \underbrace{-4}_{<0} \cdot \underbrace{(\alpha - \beta)^2}_{>0} < 0 \text{ αφού } \alpha \neq \beta$$

Αν $\alpha = \beta$ τότε

$\Delta = 0$ αφού

η εξίσωση

έχει μία

διπλή ρίζα.

($\alpha \neq 0$).