

ΑΛΓΕΒΡΑ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

Αποδείξεις

- σελ. 62-63 Ιδιότητες των απόλυτων τιμών (αποδείξεις ιδιοτήτων 1 και 3)
- σελ. 71 Ιδιότητες των ριζών (απόδειξη ιδιότητας 1)
- σελ. 79 Η εξίσωση $ax+b=0$
- σελ. 90 Απόδειξη τύπων S και P
- σελ. 154 Απόσταση σημείων (απόδειξη τύπου)

14805 Έστω a ένας πραγματικός αριθμός, για τον οποίο ισχύει $a=|3\sqrt{2}-4|+2|\sqrt{2}-2|$.

- α) Να αποδείξετε ότι $a=\sqrt{2}$. (Θεωρήστε ότι $\sqrt{2}=1,41$) (Μονάδες 10)
- β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) να αποδείξετε ότι $a^3=2a$. (Μονάδες 5)
- γ) Να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης $A=a^3+(a-1)^2$. (Μονάδες 10)

Αν $2 < x < 3$, τότε:

- α) Να αποδείξετε ότι η παράσταση $A = |x-2| - 2|4-x| + 3|x-3|$ είναι ανεξάρτητη του x .
- β) Να γράψετε χωρίς την απόλυτη τιμή την παράσταση $B = ||2-x| - 1|$.

36892 α) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{|x+1|}{3} - \frac{|x+1|+4}{5} = \frac{2}{3}$

- β) Να λύσετε την ανίσωση $-x^2+2x+3 \leq 0$
- γ) Να εξετάσετε αν οι λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος είναι και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος

36651 Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5 = 0$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης όταν $\lambda = -2$ και όταν $\lambda = 3$. (Μονάδες 8)
- β) i. Να αποδείξετε ότι αν $\lambda = 5$, τότε η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα. (Μονάδες 3)
- ii. Να εξετάσετε αν υπάρχει άλλη τιμή του λ , ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα. (Μονάδες 6)
- γ) Αν ισχύει $|\lambda^2 - 4\lambda - 5| = 4\lambda - \lambda^2 + 5, \lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 5\}$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 8)

33584 Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 2x + \lambda = 0$, με παράμετρο $\lambda < 1$.

- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 διαφορετικές μεταξύ τους. (Μονάδες 6)
- β) Να δείξετε ότι: $x_1 + x_2 = 2$. (Μονάδες 4)
- γ) Αν για τις ρίζες x_1, x_2 ισχύει επιπλέον $|x_1 - 2| = |x_2 + 2|$, τότε:
- i. Να δείξετε ότι: $x_1 - x_2 = 4$. (Μονάδες 7)
- ii. Να βρείτε τις ρίζες x_1, x_2 και η τιμή του λ . (Μονάδες 8)

21604 Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \begin{cases} 2x-5, & x \leq 3 \\ x^2, & 3 < x < 10 \end{cases}$

- α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f σε μορφή διαστήματος.
- β) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-1)$, $f(3)$ και $f(5)$.
- γ) Να εξετάσετε αν η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- δ) Να βρείτε το/α σημείο/α της γραφικής παράστασης της f που έχει τεταγμένη $y=21$.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 6x + 5$ και $g(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$.

- α) Να λυθεί η εξίσωση $|f(x) - x^2| = 1$.
- β) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της g .
- γ) Να λυθεί η ανίσωση $-x^2 - 4x - 4 < f(1)$.

36684 Δίνονται οι συναρτήσεις f και g , με $f(x) = x^2 - 2x$ και $g(x) = 3x - 4$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g . (Μον 5)
- β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από εκείνη της g . (Μονάδες 10)
- γ) Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία της μορφής $y = \alpha$, $\alpha < -1$, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f . (Μονάδες 10)

13313 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^7 - x}{x^3 - x}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f . (Μονάδες 6)
- β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f έχει κοινά σημεία με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (Μονάδες 6)
- γ) Να δείξετε ότι $f(x) = x^4 + x^2 + 1$ για κάθε $x \in A$. (Μονάδες 6)
- δ) Να εξετάσετε αν η εξίσωση $f(x) = 3$ έχει λύση στο σύνολο A . (Μονάδες 7)

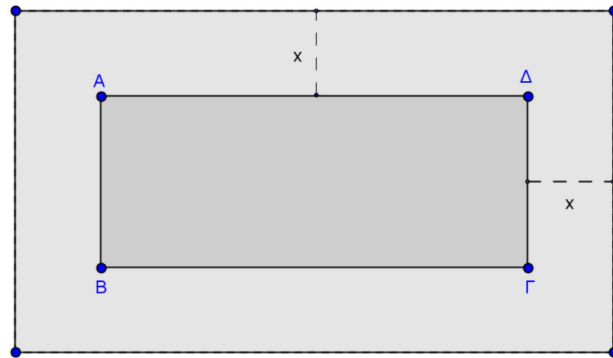
14320 Σε κάποιο τόπο, μια χειμερινή μέρα, ξεκινάμε να μετράμε τη θερμοκρασία από τις 6 το πρωί και μετά. Ο τύπος που δίνει τη θερμοκρασία, x ώρες μετά τις 6 το πρωί, είναι:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+4, & x \in [0,6] \\ 16, & x \in (6,9] \\ 25-x, & x \in (9,12] \end{cases}$$

και μετριέται σε βαθμούς Κελσίου.

- α) Να βρείτε τη θερμοκρασία στον τόπο αυτό, στις 6 το πρωί, στις 12 το μεσημέρι και στις 5 το απόγευμα. (Μονάδες 6)
- β) Να βρείτε σε ποιο χρονικό διάστημα της ημέρας η θερμοκρασία:
 - i. Διατηρείται σταθερή.
 - ii. Είναι μεγαλύτερη από 14 βαθμούς Κελσίου. (Μονάδες 4+7=11)
- γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . (Μονάδες 8)

12911 Ένα δημοτικό κολυμβητήριο έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, με διαστάσεις $15m$ και $25m$. Ο δήμος, για λόγους ασφάλειας, θέλει να κατασκευάσει γύρω από το κολυμβητήριο μια πλακοστρωμένη ζώνη με σταθερό πλάτος x m ($x > 0$), όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



- α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της ζώνης δίνεται από τη σχέση: $E(x) = 4x^2 + 80x$, $x > 0$.
(Μονάδες 9)
- β) Να βρείτε το πλάτος x της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδό $E = 500 m^2$.
(Μονάδες 7)
- γ) Ποιο μπορεί να είναι το πλάτος της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδόν μικρότερο από $500 m^2$;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
(Μονάδες 9)