

Άλγεβρα Α' λυκείου -Επαναληπτικό φυλλάδιο 1

Προσπαθήστε να λύσετε τις παρακάτω ασκήσεις. Η σειρά αυτών των φυλλαδίων ασκήσεων αποτελείται από επαναληπτικές ασκήσεις. Στοιχεύουν στην κάλυψη διαπιστωμένων βασικών κενών.

Προσπαθήστε ΜΟΝΟΙ σας αυτές τις ασκήσεις μελετώντας πρώτα τα αντίστοιχα προτεινόμενα παραδείγματα. Σε κάθε άσκηση να φαίνεται ολόκληρη η σκέψη και η προσπάθεια, ακόμα και αν δεν έχει οδηγήσει σε πλήρη λύση. Κάθε λύση που θα έχετε γράψει οφείλετε αμέσως μετά την παράδοση να μπορείτε να την γράφετε και να την εξηγείτε στον πίνακα. Οι ασκήσεις θα σας επιστρέφονται με τις βασικές διορθώσεις και γενικές λύσεις – υποδείξεις. ΠΡΟΣΠΑΘΕΙΣΤΕ να λύσετε όσες περισσότερες μπορείτε. ΓΡΑΦΕΤΕ κάθε σχετική ιδέα. Μην περιμένετε πρώτα να σκεφτείτε τη λύση από την αρχή ως το τέλος. ΑΝΑΤΡΕΞΤΕ στη θεωρία(βιβλίου και σημειώσεων), σε παραδείγματα – λυμένες ασκήσεις σχετικές και στρατηγικές επίλυσης που έχουμε αναπτύξει στο μάθημα. ΡΩΤΗΣΤΕ, εφόσον προσπαθήσατε, πριν την παράδοση για τυχόν απορίες σας.

Ιδιότητες πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού των πραγματικών αριθμών			
Ιδιότητα	Πρόσθεση	Πολλαπλασιασμός	Χρήση
Αντιμεταθετική	$\alpha + \beta = \beta + \alpha$	$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$	Προσθέτω και πολλαπλασιάζω με <u>οποιαδήποτε σειρά θέλω</u>
Προσεταιριστική	$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$	$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$	
Ουδέτερο στοιχείο	$\alpha + 0 = \alpha$	$\alpha \cdot 1 = \alpha$	
Αντίθετο/αντίστροφο στοιχείο	$\alpha + (-\alpha) = 0$	$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1, \alpha \neq 0$	Με αυτά γίνεται η αφαίρεση, διαίρεση
Επιμεριστική	$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$		

Ιδιότητες δυνάμεων πραγματικών αριθμών		
Ορισμός :	$\alpha^v = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{v \text{ παράγοντες}}$	Οι δυνάμεις είναι πολλοί πολλαπλασιασμοί ταυτόχρονα για αυτό και προηγούνται του πολλαπλασιασμού
Βασικές ιδιότητες :	$\alpha^1 = \alpha \quad \alpha^0 = 1, \alpha \neq 0 \quad \alpha^{-v} = \frac{1}{\alpha^v}, \text{ για } \alpha \neq 0$	
Ίδιοι εκθέτες	$\alpha^\mu \cdot \alpha^v = \alpha^{\mu+v}$ $\frac{\alpha^\mu}{\alpha^v} = \alpha^{\mu-v}$	$2^3 \cdot 2^4$ για $\alpha=2, \mu=3, v=4$ γίνεται $2^{3+4} = 2^7$ $\frac{3^5}{3^3}$ για $\alpha=3, \mu=5$ και $v=3$ γίνεται $3^{5-3} = 3^2$
Ίδιες βάσεις	$(\alpha\beta)^v = \alpha^v \beta^v$ $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^v = \frac{\alpha^v}{\beta^v}$	Παραδείγματα : $(2 \cdot 3)^4$ για $\alpha=2, \beta=3, v=4$ γίνεται $2^4 \cdot 3^4$
Διπλός εκθέτης	$(\alpha^k)^\lambda = \alpha^{k \cdot \lambda}$	Αρνητικός εκθέτης : $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-v} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^v$ (αντιστρέφω το κλάσμα)

Ιδιότητες ριζών		
Ορισμός: Τετραγωνική ρίζα $\sqrt{\alpha}$ ενός μη αρνητικού πραγματικού αριθμού α ονομάζουμε τον <u>μη αρνητικό πραγματικό αριθμό</u> x για τον οποίο : $x^2 = \alpha$		
	$\sqrt{x^2} = x $	$(\sqrt{x})^2 = x, \text{ για } x \geq 0$
Γινόμενο τετραγωνικών ριζών	$\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{x \cdot y}, x, y \geq 0$	
Πηλίκο τετραγωνικών ριζών	$\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}, x \geq 0, y > 0$	
ΠΡΟΣΟΧΗ :	$\sqrt{a} \pm \sqrt{b} \neq \sqrt{a \pm b}, a, b > 0$	

Προτεραιότητα των πράξεων

- 1) Αν υπάρχουν παρενθέσεις, γίνονται πρώτα οι πράξεις εντός των παρενθέσεων
- 2) Δυνάμεις
- 3) Πολλαπλασιασμοί/Διαιρέσεις
- 4) Προσθέσεις/Αφαιρέσεις

Πράξεις Κλασμάτων

Πρόσθεση-αφαίρεση: Πρώτα κάνουμε τα κλάσματα ομώνυμα. Παραδείγματα:

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2}, \quad \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 1}{3 \cdot 2} + \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 3} = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} = \frac{7}{6}, \quad \frac{x}{y} + \frac{z}{y} = \frac{x+z}{y}, \quad \frac{x}{y} + \frac{3}{z} = \frac{z \cdot x}{z \cdot y} + \frac{y \cdot 3}{y \cdot z} = \frac{zx+3y}{zy}.$$

Πολλαπλασιασμός: Πολλαπλασιάζουμε αριθμητή με αριθμητή και παρονομαστή με παρονομαστή. Παραδείγματα:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} = \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 6} = \frac{4}{12} = \frac{4:4}{12:4} = \frac{1}{3}, \quad \frac{x}{y} \cdot \frac{k}{l} = \frac{x \cdot k}{y \cdot l}.$$

Διάρθρωση: Αντιστρέφουμε το δεύτερο κλάσμα και πολλαπλασιάζουμε. Παραδείγματα:

$$\frac{1}{2} : \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}, \quad \frac{x}{z} : \frac{y}{z} = \frac{x}{z} \cdot \frac{z}{y} = \frac{x \cdot z}{z \cdot y} = \frac{x}{y}.$$

Σύνθετο κλάσμα: Κάνουμε διαίρεση. Παραδείγματα: $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{2} : \frac{3}{5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{6}.$

1. Να γίνουν οι πράξεις:

a. $\frac{2}{3} + \frac{8}{3}$ b. $\frac{-5}{2} + \frac{4}{2} - \frac{3}{2}$ c. $\frac{2}{3} + \frac{13}{6}$ d. $\frac{7}{8} - \frac{5}{2} - \frac{3}{4}$ e. $\frac{-2}{5} - \frac{1}{30} + \frac{5}{6} + \frac{7}{10}$

f. $\left(\frac{-5}{2}\right) \cdot \left(\frac{-7}{4}\right) \cdot \frac{9}{16}$ g. $\frac{5}{2} : \frac{3}{4}$ h. $\frac{1}{2} : \left(\frac{3}{4} : \frac{4}{5}\right)$ i. $\frac{\frac{3}{2}}{\frac{2}{4}}$ k. $\frac{-2}{\left(\frac{1}{-2}\right)}$

Παραγοντοποιήσεις :

Παραγοντοποίηση είναι η διαδικασία μετατροπής ενός αθροίσματος σε γινόμενο, χωρίς να περιέχεται ως παράγοντας το 1 σε κάποια μορφή. Καθένας από τους αριθμούς που πολλαπλασιάζονται στην παραγοντοποιημένη παράσταση(γινόμενο) λέγεται παράγοντας του γινομένου. Η παραγοντοποίηση γίνεται με τους εξής κυρίως τρόπους:

α. **Κοινός παράγοντας – Επιμεριστική ιδιότητα:**

Χρησιμοποιείται η επιμεριστική ιδιότητα για να γίνει το άθροισμα γινόμενο.

Παραδείγματα: $6x+4xy=2x \cdot 3+2x \cdot 2y=2x \cdot (3+2y)$ ή $3\alpha\beta+6\alpha=3\alpha(\beta+2)$

β. **Ταυτότητες.** Γίνεται χρήση κάποιας από τις ταυτότητες:

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2, \quad a^2-2ab+b^2=(a-b)^2, \quad a^2-b^2=(a-b)(a+b).$$

Παραδείγματα: $9-6x+x^2=3^2-2 \cdot 3 \cdot x+x^2=(3-x)^2$, $9-x^2=3^2-x^2=(3-x) \cdot (3+x).$

γ. **Ομαδοποίηση.** Σε αυτήν την περίπτωση γίνεται παραγοντοποίηση σε δύο βήματα τουλάχιστον. Στο πρώτο βήμα δημιουργούμε με παραγοντοποίηση λιγότερους προσθεταίους, ώστε να έχουν κοινό παράγοντα μεταξύ τους, οπότε στο δεύτερο βήμα εφαρμόζουμε την επιμεριστική.

Παραδείγματα: $3a+3b-5a-5b=3(a+b)-5(a+b)=(a+b)(3-5)=(a+b)(-2)$,
 $ax+bx-ay-by=x(a+b)-y(a+b)=(a+b)(x-y)$

δ. **Τριώνυμο:** Αν έχουμε στον αριθμητή ή τον παρονομαστή ένα τριώνυμο της μορφής ax^2+bx+c βρίσκουμε τη διακρίνουσα και τις ρίζες του όποιες έχει και έχουμε τις εξής περιπτώσεις παραγοντοποίησης:

$$\begin{aligned} \Delta > 0 \text{ και δύο ρίζες } x_1, x_2 \text{ τότε: } & ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2) \\ \Delta = 0 \text{ και μία ρίζα } x_0 \text{, τότε: } & ax^2+bx+c = a(x-x_0)^2 \\ \Delta < 0 \text{ καμία ρίζα και τότε } & \text{το τριώνυμο δεν παραγοντοποιείται.} \end{aligned}$$

2. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:

$$\begin{array}{lllll} \text{a. } 3x-15 & \text{b. } 4x+8 & \text{c. } 3x-6y+12 & \text{d. } 15x^3y^2+20x^2y & \text{e. } xy-yz+wy^2 \\ \text{f. } x+3x^2-4x^3 & \text{g. } x(a-1)+y(a-1) & \text{h. } x^2(k-1)+x(1-k) & \text{i. } ax+ay+5x+5y & \\ \text{k. } a^2-16 & \text{l. } 9x^2-16 & \text{m. } x^4-y^6 & \text{n. } (x-1)^2-16 & \text{o. } 5x^2-125 \text{ p. } 3x^2-12 \\ \text{q. } ka^2-kb^4 & \text{r. } x^2+49-14x-4y^2-1-4y & \text{s. } x^2+10x+25-a^2-4b^2+4ab & & \end{array}$$

Απλοποιήσεις κλασμάτων – παραστάσεων

Απλοποιήσεις σε ένα κλάσμα μπορούν να γίνουν ΜΟΝΟ όταν είναι ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΜΕΝΟΙ ο αριθμητής και ο παρονομαστής του. Απλοποιούνται ίδιοι παράγοντες.

Για παράδειγμα ΔΕΝ ΓΙΝΟΝΤΑΙ : $\frac{3+4}{4}=3$ ή $\frac{x+y}{x}=y$ ή $\frac{a(x+y)+b}{(x+y)}=a+b$

Σωστές απλοποιήσεις : $\frac{3x+5xy}{xy}=\frac{x(3+5y)}{xy}=\frac{3+5y}{y}$ ή $\frac{x^2-25}{3x-15}=\frac{(x-5)(x+5)}{3(x-5)}=\frac{x+5}{3}$

3. Να γίνουν οι απλοποιήσεις :

$$\begin{array}{lllll} \text{a. } \frac{4x^2-25}{2xy+5y+4xz+10z} & \text{b. } \frac{3x^2-3}{6x^2-6x} & \text{c. } \frac{x^2+xw}{w^2+xw} & \text{d. } \frac{(a-b)(b-c)}{(b-a)(c-b)} & \text{e. } \frac{3x-9}{x^2-3x} \\ \text{f. } \frac{a^2-2ab+b^2}{a^3-b^3} & \text{g. } \frac{y^2-1}{y^2+2y+1} & \text{h. } \frac{5x^2-20}{(x-2)^2} & \text{i. } \frac{2xy^2}{8x^2y^2} & \text{k. } \frac{a^2-4}{a^2+a-6} \cdot \frac{a+3}{a^2+2a} \end{array}$$

4. Να γίνουν οι πράξεις στις παρακάτω παραστάσεις :

$$\begin{array}{lllll} \text{a. } \frac{2x+6}{x^2} \cdot \frac{4x}{x+3} & \text{b. } \frac{1}{y^2} : \left(\frac{-3}{y} \right) & \text{c. } \frac{x-y}{x^2w^3} \cdot \frac{x^3w^2}{x^2-w^2} & \text{d. } \frac{x+4}{5} : \frac{x+4}{15} & \text{e. } \frac{2y-1}{y+1} : \frac{1-2y}{1+y} \\ \text{f. } \frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{\frac{b}{a}-\frac{a}{b}} & \text{g. } \left(\frac{x+3}{2x+1} - \frac{x}{2x-1} \right) \left(1 + \frac{1}{4x-3} \right) & \text{h. } \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 1 \right) : \left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \right) \end{array}$$