

Ασκήσεις στη διάταξη

A. Πρόσημο Διαφοράς

1. Αν $\alpha < \beta$, τότε να αποδειχθούν οι σχέσεις:
α) $6\alpha - 3 < 6\beta - 3$ β) $5(\alpha + 1) < 5(\beta + 1)$ γ) $6(\alpha - \beta) < \alpha - \beta$
2. Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$, τότε να αποδειχθούν οι σχέσεις:
α) $2\alpha + 3\gamma < 2\beta + 3\delta$ β) $2\alpha + 3\gamma < 2\beta + 3\delta$ γ) $\frac{\alpha + \gamma}{2} + 4 < \frac{\beta + \delta}{2} + 4$
3. Αν ισχύει ότι: $(\alpha - \beta)(\alpha^2 + 1) \geq 0$ να γίνει σύγκριση των α, β .

B. Πρόσημο γινομένου

1. Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$, τότε να αποδειχθεί ότι: $\alpha\gamma - \alpha\delta - \beta\gamma + \beta\delta > 0$
2. Αν $x > 1$, τότε να αποδειχθεί ότι: $2x^3 - x^2 < 2x^4 - 1$
3. Αν $x < 1$ και $y < 1$ τότε να αποδειχθεί ότι: $x + y < 1 + xy$.
4. Να συγκριθούν οι αριθμοί: $A = \alpha^3 + \beta^3$ και $B = \alpha^2\beta + \alpha\beta^2$, αν $\alpha, \beta < 0$.

Γ. Παραστάσεις με ταυτότητες

1. Να αποδειχθεί ότι για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει ότι: $\alpha^2 + 4 \geq 4\alpha$.
2. Αν $\alpha > 0$, να αποδειχθεί ότι: $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2$ ενώ, αν $\alpha < 0$, ισχύει ότι: $\alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2$.
3. Ομοίως: $\frac{2\alpha^2}{\alpha^4 + 1} \leq 1$.
4. Να αποδειχθεί ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει ότι: $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$.
5. Να αποδειχθούν οι παρακάτω σχέσεις:
α) $\alpha^2 - 10\alpha + 26 > 0$ β) $2\alpha^2 - 2\alpha + 1 > 0$ γ) $\alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha + 4 \geq 0$
δ) $\alpha^2 - 4\alpha + 5 > 0$ ε) $-\alpha^2 + 6\alpha - 11 < 0$ στ) $\alpha^2 - \alpha + 1 > 0$

Δ. Μέγιστη – Ελάχιστη τιμή παράστασης

1. Αν ισχύει ότι $1 < \alpha < 2$ και $3 < \beta < 4$, να βρεθεί μεταξύ ποιών αριθμών είναι οι παραστάσεις:
α) $\alpha + \beta$ β) $\alpha - \beta$ γ) $\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta}$ δ) $3 - \frac{\alpha}{\beta}$ ε) $\alpha^3 - 3\beta^2$ στ) $\frac{1}{\alpha} - \frac{3}{\beta}$.
2. Ομοίως, αν ισχύουν $-2 < \alpha < -1$ και $-4 < \beta < -3$ για τις:
α) $4\alpha - 2\beta + 1$ β) $2\alpha^2 + \beta^2$ γ) $2 - 3\alpha\beta$ δ) $\beta^2 - \alpha^3$ ε) $(\alpha + \beta)^2 - 2\beta$

Ε. Επίλυση εξισώσεων

1. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί χ και ψ ώστε:
α) $\chi^2 + \psi^2 - 6\chi + 10\psi = -34$ β) $\chi^2 + \psi^2 - 6\chi + 10\psi = -34$ γ) $2\chi + \psi - 2\chi\psi + 2\chi + 1 \leq 0$