

ΤΟ Εσωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων

33 ασκήσεις – ανακτήθηκαν 15/11/2023

22040_2

Δίνεται το διάνυσμα $\vec{a} = (-4, 3)$.

α) Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{\beta}$ που να είναι κάθετο στο $\vec{a}$. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{\gamma}$ που να είναι κάθετο στο $\vec{a}$ και να έχει μέτρο 1. (Μονάδες 13)

21682_2

Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δυο διανύσματα για τα οποία ισχύει $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (11, 2)$ και $\vec{\alpha} - \vec{\beta} = (-5, -10)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} = (3, -4)$ και να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\beta}$. (Μονάδες 14)

β) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ και $|\vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}|$. (Μονάδες 11)

20773_2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (1, -2)$ και $\vec{b} = (2, 3)$

α) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{u} = 2\vec{a} + \vec{b}$. (Μονάδες 08)

β) Αν $\vec{u} = (4, -1)$ να βρείτε την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε το διάνυσμα $\vec{u}$ να είναι κάθετο στο διάνυσμα

$\vec{v} = (1, \kappa)$. (Μονάδες 09)

20733_2

Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$, με $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ και $\overrightarrow{AB} = \vec{a} - \vec{b}$ και $\overrightarrow{AG} = \vec{a} + \vec{b}$.

α) Να εκφράσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{BG}$ συναρτήσει του διανύσματος $\vec{b}$. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$. (Μονάδες 10)

γ) Να αιτιολογήσετε γιατί τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AG}$ είναι κάθετα. (Μονάδες 05)

20732_2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (2, 1)$ και $\vec{b} = (-8, -4)$.

α) Να δείξετε ότι τα διάνυσμα $\vec{a}, \vec{b}$ είναι αντίρροπα και ότι $|\vec{b}| = 4|\vec{a}|$. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

15252_2

Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB} = (2,1)$ και $\overrightarrow{AG} = (3,-1)$.

- α) Να δείξετε ότι $\overrightarrow{BG} = (1,-2)$. (Μονάδες 8)
- β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με υποτείνουσα την ΑΓ. (Μ 9)
- γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ. (Μονάδες 8)

15852_2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3,2)$, $\vec{\beta} = (-2,1)$.

Να υπολογίσετε:

- α) το διάνυσμα $\vec{\nu} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$. (Μονάδες 7)
- β) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$. (Μονάδες 6)
- γ) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\nu}$. (Μονάδες 12)

22554_2

Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy , με μοναδιαία διανύσματα των αξόνων $\hat{x}, \hat{y}$ τα $\vec{i}, \vec{j}$ αντίστοιχα, τα σημεία A και B έχουν διανύσματα θέσεως $\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ και $\overrightarrow{OB} = 6\vec{i} - \vec{j}$. Έστω M ένα σημείο τέτοιο ώστε $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{5}(2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB})$.

- α) Να αποδείξετε ότι:
- $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$, (Μονάδες 8)
 - $\overrightarrow{OM} = \vec{j}$. (Μονάδες 8)
- β) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OM}$. (Μονάδες 9)

22170_2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-1,3)$, $\vec{\beta} = (-2, -\frac{1}{2})$ και $\vec{\nu} = (x^2, x-1)$.

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$. (Μονάδες 07)
- β) Να βρείτε τους αριθμούς x για τους οποίους τα διανύσματα $\vec{u} = (3,4)$ και $\vec{\nu}$ είναι κάθετα. (Μ 09)
- γ) Να βρείτε τους αριθμούς x για τους οποίους τα διανύσματα $\vec{\nu}$ και $\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά; (Μ 09)

14586_2

Δίνονται τα σημεία $A(1,2)$, $B(3,4)$ και $\Gamma(5,-2)$.

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}$ και να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{A}$ είναι ορθή. (Μονάδες 9)
- β) Αν M είναι το μέσο του ΒΓ, να βρείτε τα μέτρα των $\overrightarrow{AM}$ και $\overrightarrow{BG}$. (Μονάδες 8)
- γ) Να γραφεί το $\overrightarrow{BG}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\overrightarrow{AG}$ και $\overrightarrow{AM}$. (Μονάδες 8)

20888_2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$, για τα οποία ισχύουν: $|\vec{\alpha}|=4$, $|\vec{\beta}|=5$, $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{2\pi}{3}$ και $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + 3$

$\vec{\beta}$. Να υπολογίσετε:

α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$. (Μονάδες 10)

β) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$. (Μονάδες 15)

20685_2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u}=(1,1)$, $\vec{w}=(-10,2)$ και τα σημεία $A(-1,2)$, $B(\beta,0)$, $\Gamma(0,\gamma)$. Τα διανύσματα $\vec{u}$, $\vec{AB}$ είναι κάθετα και το διάνυσμα $\vec{w}$ είναι παράλληλο στο διάνυσμα $\vec{AG}$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{AB}$ και να αποδείξετε ότι $\beta=1$. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{AG}$ και να αποδείξετε ότι $\gamma=\frac{9}{5}$. (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{AB} \cdot \vec{AG}$. (Μονάδες 7)

15186_2

Δίνονται τα σημεία $A(2,1)$, $B(6,3)$, $\Delta(1,-2)$ και $\Gamma(9,2)$.

Να αποδείξετε ότι:

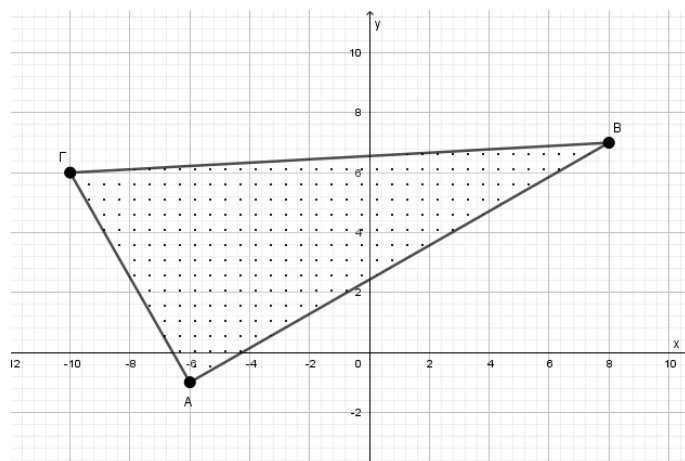
α) Το μέσο M του τμήματος AB έχει συντεταγμένες $(4,2)$ και το μέσο N του τμήματος $\Gamma\Delta$ έχει συντεταγμένες $(5,0)$. (Μονάδες 8)

β) $\vec{MN}=(1,-2)$ και $\vec{\Delta\Gamma}=(8,4)$. (Μονάδες 8)

γ) $\vec{MN} \perp \vec{\Delta\Gamma}$. (Μονάδες 9)

15996_2

Δίνονται τα σημεία $A(-6,-1)$, $B(8,7)$, $\Gamma(-10,6)$, τα οποία ορίζουν τρίγωνο $AB\Gamma$.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{AB}$, $\vec{B\Gamma}$ και του αθροίσματος τους $\vec{AB} + \vec{B\Gamma}$.

(Μονάδες 10)

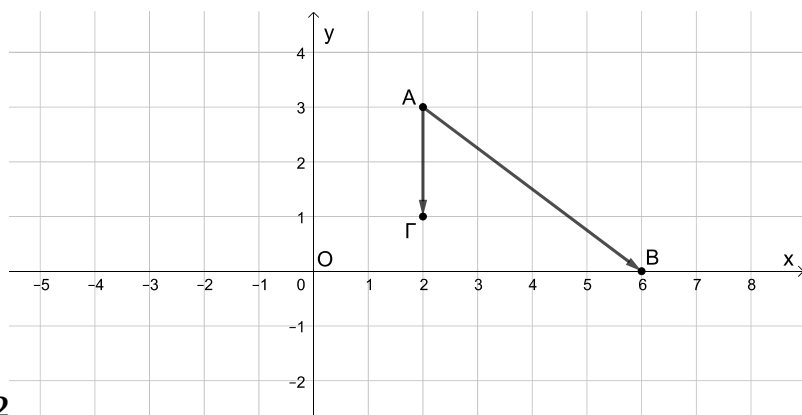
β) Ένας μαθητής βλέποντας το τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχυρίστηκε ότι είναι ορθογώνιο. Να ελέγξετε την αλήθεια του ισχυρισμού. (Μονάδες 15)

17075_2

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{A\Gamma}$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy .

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{AB} = (4, -3)$ και $\vec{A\Gamma} = (0, -2)$. (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{AB}$ και $\vec{A\Gamma}$. (Μονάδες 13)



16428_2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με: $|\vec{\alpha}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $|\vec{\beta}| = \frac{1}{2}$ και $|3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}| = |\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}|$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -\frac{3}{8}$. (Μονάδες 15)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. (Μονάδες 10)

16427_2

Δίνονται τα σημεία $A(-2, 3)$, $B(0, 8)$, $\Gamma(5, 3)$ και $\Delta(10, 5)$. Να υπολογίσετε:

α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{AB} \cdot \vec{I\Delta}$. (Μονάδες 12)

β) τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{u} = \vec{AB} + \vec{I\Delta}$ με τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 13)

16426_2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, -1)$ και $\vec{\beta} = (-3, 2)$.

α) Να υπολογίσετε το γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot (2\vec{\alpha} - \vec{\beta})$. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (x, y)$ όταν $\vec{\gamma} \perp \vec{\alpha}$ και $|\vec{\gamma}| = \sqrt{5}$. (Μονάδες 15)

15317_2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{v} = (3, 0)$ και $\vec{w} = (-3, 4)$.

α) Να δείξετε ότι τα διανύσματα δεν είναι παράλληλα. (Μονάδες 12)

β)

i. Σε σύστημα συντεταγμένων να σχεδιάσετε τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{w}$. (Μονάδες 10)

ii. Να προσδιορίσετε το είδος της γωνίας θ που σχηματίζουν τα διανύσματα. (Μονάδες 3)

14953_2

Θεωρούμε τρίγωνο ABΓ με $A(-2, 5)$, $B(7, 8)$, $\Gamma(1, -4)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{AB}$ και $\vec{AG}$. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{AB} \cdot \vec{AG}$. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε, σε μοίρες, τη γωνία $\widehat{BAG}$. (Μονάδες 5)

16144_2

Δίνεται ρόμβος ABΓΔ με κέντρο O, πλευρά 4 και $\widehat{A} = 60^\circ$. Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα :

α) $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$

β) $\vec{AD} \cdot \vec{BG}$

γ) $\vec{OD} \cdot \vec{AO}$

δ) $\vec{OD} \cdot \vec{OB}$

ε) $\vec{AD} \cdot \vec{BD}$

(Μονάδες 25)

16141_2

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ABΓ πλευράς 10 και το μέσο M της πλευράς BΓ.

α) Να βρεθούν τα μέτρα των γωνιών:

iii. $\widehat{(\vec{AB}, \vec{AG})}$

iv. $\widehat{(\vec{AM}, \vec{BG})}$

v. $\widehat{(\vec{AM}, \vec{GA})}$

vi. $\widehat{(\vec{BM}, \vec{GM})}$

vii. $\widehat{(\vec{GM}, \vec{GB})}$

(Μονάδες 10)

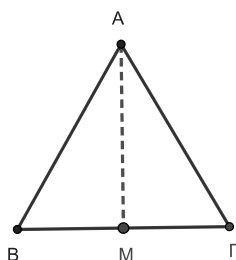
β) Να υπολογιστούν τα εσωτερικά γινόμενα:

i. $\vec{AM} \cdot \vec{BG}$

ii. $\vec{AM} \cdot \vec{GA}$

iii. $\vec{GM} \cdot \vec{GB}$

(Μονάδες 15)



15825_2

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 4, (\vec{\alpha} \wedge \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ και το $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 4$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = 0$. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τη $\left(\vec{\alpha} \wedge \vec{\gamma} \right)$. (Μονάδες 7)

15379_2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, 3), \vec{\beta} = (3, -1)$.

Να υπολογίσετε:

α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και την γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$. (Μονάδες 13)

β) το διάνυσμα $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$. (Μονάδες 12)

15463_2

Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB} = (2, 1)$ και $\overrightarrow{AG} = (3, -1)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{BG} = (1, -2)$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BG}$. (Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BG}|$. (Μονάδες 8)

15073_2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, 2)$ και $\vec{\beta} = (2, 3)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$. (Μονάδες 9)

15038_2

Θεωρούμε διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ τέτοια ώστε $|\vec{\alpha}| = 3, |\vec{\beta}| = 4$ και $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3}$.

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τα $\vec{\alpha}^2$ και $\vec{\beta}^2$. (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι $(3\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) = 15$. (Μονάδες 10)

18243_3

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 4$, $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ και τα διανύσματα $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{\delta} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

α) Να βρείτε το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε το $\vec{\gamma} \cdot \vec{\delta}$. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε τα $|\vec{\gamma}|, |\vec{\delta}|$. (Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε τη γωνία $(\vec{\gamma}, \vec{\delta})$. (Μονάδες 5)

22064_4

α) Αν $\vec{AB}, \vec{AG}, \vec{AD}$ είναι τρία διανύσματα, τότε οι ποσότητες $\vec{AB} \cdot \vec{AG}$ και $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$: i) είναι αριθμοί ή διανύσματα; ii) μπορούν να συγκριθούν; (Μονάδες 5)

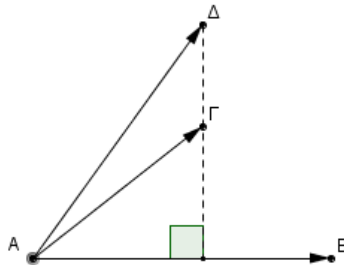
β) Για τα διανύσματα του παρακάτω σχήματος να επιλέξετε την σωστή απάντηση:

i) $\vec{AB} \cdot \vec{AG} > \vec{AB} \cdot \vec{AD}$

ii) $\vec{AB} \cdot \vec{AG} < \vec{AB} \cdot \vec{AD}$

iii) $\vec{AB} \cdot \vec{AG} = \vec{AB} \cdot \vec{AD}$

(Μονάδες 10)



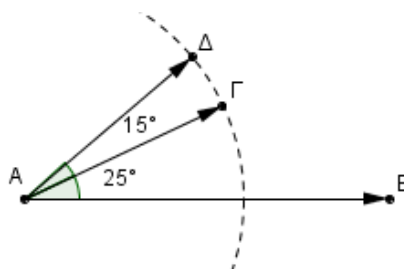
γ) Για τα διανύσματα του παρακάτω σχήματος (η διακεκομμένη γραμμή είναι τμήμα κύκλου με κέντρο A) να επιλέξετε την σωστή απάντηση:

i) $\vec{AB} \cdot \vec{AG} > \vec{AB} \cdot \vec{AD}$

ii) $\vec{AB} \cdot \vec{AG} < \vec{AB} \cdot \vec{AD}$

iii) $\vec{AB} \cdot \vec{AG} = \vec{AB} \cdot \vec{AD}$

(Μονάδες 10)



22063_4

α) Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο μη μηδενικά διανύσματα. Να αποδείξετε ότι:

i) $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{\alpha} \uparrow \vec{\beta}$. (Μονάδες 5)

ii) $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = ||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|| \Leftrightarrow \vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$. (Μονάδες 5)

β) Θεωρούμε τρία διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν ότι:

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}, \quad |\vec{\alpha}| = 1, \quad |\vec{\beta}| = 2, \quad |\vec{\gamma}| = 1.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $\vec{\alpha} \uparrow \vec{\gamma}$. (Μονάδες 5)

ii) $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$. (Μονάδες 5)

iii) $\vec{\alpha} = \vec{\gamma}$ και $\vec{\beta} = -2\vec{\alpha}$. (Μονάδες 5)

18520_4

α) Να αποδειχθεί ότι για όλα τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει:

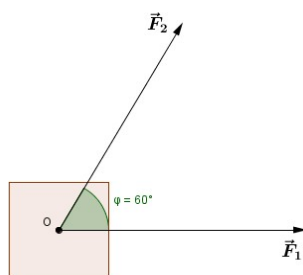
$$|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 + |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = 2|\vec{\alpha}|^2 + 2|\vec{\beta}|^2 \quad (1) \quad (\text{Μονάδες } 06)$$

β) Δίνεται το παραλληλόγραμμο $OAGB$ με $\vec{OA} = \vec{\alpha}$ και $\vec{OB} = \vec{\beta}$.

i. Να σχεδιάσετε τα διανύσματα $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$. (Μονάδες 05)

ii. Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία της ισότητας (1). (Μονάδες 04)

γ) Ένα σώμα σύρεται πάνω σε λείο επίπεδο από δύο ανθρώπους, οι οποίοι εξασκούν πάνω σε αυτό δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Οι δυνάμεις έχουν ίσα μέτρα 10 N (Newton) και η γωνία που σχηματίζουν είναι 60° . Να σχεδιάσετε την συνισταμένη δύναμη $\vec{F}$ και να βρείτε το μέτρο της. (Μονάδες 10)



15320_4

Δίνεται παραλληλόγραμμο $OAGB$ με $\vec{OA} = \vec{\alpha}$ και $\vec{OB} = \vec{\beta}$, όπου $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι μη μηδενικά διανύσματα.

α) Να δείξετε ότι:

i. $|\vec{OG}|^2 = |\vec{\alpha}|^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + |\vec{\beta}|^2$. (Μονάδες 9)

ii. $|\vec{AB}|^2 = |\vec{\alpha}|^2 - 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + |\vec{\beta}|^2$. (Μονάδες 9)

β) Αν $|\overrightarrow{OG}| = |\overrightarrow{AB}|$, να δείξετε ότι το $\triangle OAB$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 7)

18547_4

Δίνονται τα σημεία $A(0, -1)$, $B(\lambda, 1)$ και $\Gamma(\lambda-2, \lambda-3)$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε :

- i. Τα σημεία A, B και Γ να είναι κορυφές τριγώνου. (Μονάδες 8)
- ii. Το τρίγωνο ABΓ να είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$. (Μονάδες 7)

β) Για $\lambda = -2$, να βρείτε:

- i. Το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$. (Μονάδες 4)
- ii. Το εμβαδό του τριγώνου ABΓ. (Μονάδες 6)