

3.2 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

Για κάθε γωνία ω να αποδείξετε ότι : $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

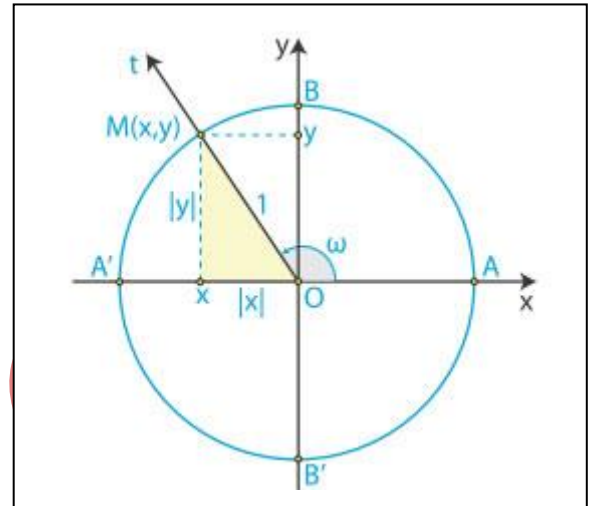
Αν $M(x, y)$ είναι το σημείο στο οποίο η τελική πλευρά της γωνίας ω τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο, τότε θα είναι :

$$x = \sigma\upsilon\nu\omega \text{ και } y = \eta\mu\omega$$

Επειδή όμως ,

$$(OM) = 1 \text{ και } (OM)^2 = |x|^2 + |y|^2 = x^2 + y^2$$

$$\text{θα ισχύει : } x^2 + y^2 = 1 \text{ οπότε θα έχουμε : } \eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$$



Για κάθε γωνία ω να αποδείξετε ότι :

$$\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \text{ και } \sigma\phi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$$

1

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Στο ίδιο σχήμα έχουμε :

$$\epsilon\phi\omega = \frac{y}{x} = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \text{ (εφόσον } x = \sigma\upsilon\nu\omega \neq 0 \text{)}$$

$$\sigma\phi\omega = \frac{x}{y} = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} \text{ (εφόσον } y = \eta\mu\omega \neq 0 \text{)}$$

Για κάθε γωνία ω να αποδείξετε ότι : $\epsilon\phi\omega \cdot \sigma\phi\omega = 1$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Είναι :

$$\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \text{ και } \sigma\phi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} \text{ (εφόσον } \sigma\upsilon\nu\omega \neq 0 \text{ και } \eta\mu\omega \neq 0 \text{)}$$

Επομένως :

$$\epsilon\phi\omega \cdot \sigma\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} = 1.$$

Για κάθε γωνία ω να αποδείξετε ότι :

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1+\epsilon\phi^2\omega} \quad \text{και} \quad \eta\mu^2\omega = \frac{\epsilon\phi^2\omega}{1+\epsilon\phi^2\omega}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Διαιρούμε και τα δύο μέλη της ταυτότητας $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ με $\sigma\upsilon\nu^2\omega \neq 0$ και έχουμε:

$$\frac{\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} + \frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\eta\mu^2\omega} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} \Leftrightarrow \epsilon\phi^2\omega + 1 = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1+\epsilon\phi^2\omega}.$$

$$\text{Άρα } \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1+\epsilon\phi^2\omega}.$$

ii) Αν στην ταυτότητα $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ θέσουμε $\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1+\epsilon\phi^2\omega}$,

$$\text{έχουμε: } \eta\mu^2\omega + \frac{1}{1+\epsilon\phi^2\omega} = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega = 1 - \frac{1}{1+\epsilon\phi^2\omega} \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega = \frac{\epsilon\phi^2\omega}{1+\epsilon\phi^2\omega}.$$

$$\text{Άρα } \eta\mu^2\omega = \frac{\epsilon\phi^2\omega}{1+\epsilon\phi^2\omega}.$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x για τις οποίες είναι

i. $\eta\mu x = -1$ και $\sigma\upsilon\nu x = -1$	ii. $\eta\mu x = 0$ και $\sigma\upsilon\nu x = 0$
iii. $\eta\mu x = 1$ και $\sigma\upsilon\nu x = 1$	iv. $\eta\mu x = -1$ και $\sigma\upsilon\nu x = 1$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ξέρουμε ότι Για κάθε γωνία x ισχύει ότι : $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$

i. οπότε αν υπάρχει τέτοια γωνία x για την οποία ισχύει $\eta\mu x = -1$ και $\sigma\upsilon\nu x = -1$ τότε θα πρέπει

$$\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \Leftrightarrow (-1)^2 + (-1)^2 = 1 \Leftrightarrow 2 = 1 \text{ άτοπο}$$

Άρα δεν υπάρχει τέτοια γωνία x για την οποία ισχύει $\eta\mu x = -1$ και $\sigma\upsilon\nu x = -1$

ii. οπότε αν υπάρχει τέτοια γωνία x για την οποία ισχύει $\eta\mu x = 0$ και $\sigma\upsilon\nu x = 0$ τότε θα πρέπει

$$\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \Leftrightarrow (0)^2 + (0)^2 = 1 \Leftrightarrow 0 = 1 \text{ άτοπο}$$

Άρα δεν υπάρχει τέτοια γωνία x για την οποία ισχύει $\eta\mu x = 0$ και $\sigma\upsilon\nu x = 0$

iii. οπότε αν υπάρχει τέτοια γωνία x για την οποία ισχύει $\eta\mu x = 1$ και $\sigma\upsilon\nu x = 1$ τότε θα πρέπει

$$\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \Leftrightarrow (1)^2 + (1)^2 = 1 \Leftrightarrow 2 = 1 \text{ άτοπο}$$

Άρα δεν υπάρχει τέτοια γωνία x για την οποία ισχύει $\eta\mu x = 1$ και $\sigma\upsilon\nu x = 1$

iv. οπότε αν υπάρχει τέτοια γωνία x για την οποία ισχύει $\eta\mu x = -1$ και $\sigma\upsilon\nu x = 1$ τότε θα πρέπει

$$\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \Leftrightarrow (-1)^2 + (1)^2 = 1 \Leftrightarrow 2 = 1 \text{ άτοπο}$$

Άρα δεν υπάρχει τέτοια γωνία x για την οποία ισχύει $\eta\mu x = -1$ και $\sigma\upsilon\nu x = 1$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2. Αν $\sigma\upsilon\nu x = \frac{12}{13}$ και $0 < x < \frac{\pi}{2}$, να βρεθούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = 4\epsilon\phi x + 5\sigma\phi x - 13(\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x)$

Λύση

Είναι $0 < x < \frac{\pi}{2}$, (πρώτο τεταρτημόριο ΟΗΕΣ) άρα $\begin{cases} \eta\mu x > 0 \\ \sigma\upsilon\nu x > 0 \\ \epsilon\phi x > 0 \\ \sigma\phi x > 0 \end{cases}$

$$\text{ισχύει ότι } \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2 x + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{144}{169} + \eta\mu^2 x = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2 x = 1 - \frac{144}{169} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu^2 x = \frac{169 - 144}{169} \Leftrightarrow \eta\mu^2 x = \frac{25}{169} \Leftrightarrow \eta\mu x = \pm \sqrt{\frac{25}{169}} \Leftrightarrow \eta\mu x = \frac{5}{13} \text{ δεκτή ή } \eta\mu x = -\frac{5}{13} \text{ απορ}$$

$$\epsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \frac{5}{12} = \frac{13 \cdot 5}{13 \cdot 12} = \frac{5}{12}$$

$$\sigma\phi x = \frac{\sigma\eta\nu x}{\eta\mu x} = \frac{\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} = \frac{12 \cdot 13}{13 \cdot 5} = \frac{12}{5}$$

$$A = 4\epsilon\phi x + 5\sigma\phi x - 13(\sigma\eta\nu x + \eta\mu x) = 4\frac{5}{12} + 5\frac{12}{5} - 13\left(\frac{12}{13} + \frac{5}{13}\right) = \frac{5}{3} + 12 - 13\frac{17}{13} = \frac{5}{3} + 12 - 17 = \frac{5}{3} - 5 = \frac{5-15}{3} = -\frac{10}{3}$$

3. Αν $\eta\mu x = \frac{3}{5}$ και $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, να βρεθούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \sqrt{3}\epsilon\phi x + 3\sqrt{3}\sigma\phi x - 2\sigma\eta\nu x$

Λύση

Είναι $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ (δεύτερο τεταρτημόριο ΟΗΕΣ) άρα $\begin{cases} \eta\mu x > 0 \\ \sigma\eta\nu x < 0 \\ \epsilon\phi x < 0 \\ \sigma\phi x < 0 \end{cases}$

$$\text{ισχύει ότι } \eta\mu^2 x + \sigma\eta\nu^2 x = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \sigma\eta\nu^2 x = 1 \Leftrightarrow \frac{9}{25} + \sigma\eta\nu^2 x = 1 \Leftrightarrow \sigma\eta\nu^2 x = 1 - \frac{9}{25} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma\eta\nu^2 x = \frac{25}{25} - \frac{9}{25} \Leftrightarrow \sigma\eta\nu^2 x = \frac{16}{25} \Leftrightarrow \sigma\eta\nu x = \pm \sqrt{\frac{16}{25}} \Leftrightarrow \sigma\eta\nu x = \pm \frac{4}{5} \text{ απορ ή } \sigma\eta\nu x = -\frac{4}{5}$$

$$\epsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\eta\nu x} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = -\frac{3}{4}$$

$$\sigma\phi x = \frac{\sigma\eta\nu x}{\eta\mu x} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4 \cdot 5}{3 \cdot 5} = -\frac{4}{3}$$

$$A = 4\epsilon\phi x + 3\sigma\phi x - 5\sigma\eta\nu x + \eta\mu x = -4\frac{3}{4} - 3\frac{4}{3} - 5\left(-\frac{4}{5}\right) + \frac{3}{5} = -3 - 4 + 4 + \frac{3}{5} = -3 + \frac{3}{5} = \frac{-15+3}{5} = -\frac{12}{5}$$

4

4. Αν $\eta\mu x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, να βρεθούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \sqrt{3}\epsilon\phi x + 3\sqrt{3}\sigma\phi x - 2\sigma\eta\nu x$

Λύση

Είναι $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ (δεύτερο τεταρτημόριο ΟΗΕΣ) άρα $\begin{cases} \eta\mu x > 0 \\ \sigma\eta\nu x < 0 \\ \epsilon\phi x < 0 \\ \sigma\phi x < 0 \end{cases}$

$$\text{ισχύει ότι } \eta\mu^2 x + \sigma\eta\nu^2 x = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \sigma\eta\nu^2 x = 1 \Leftrightarrow \frac{3}{4} + \sigma\eta\nu^2 x = 1 \Leftrightarrow \sigma\eta\nu^2 x = 1 - \frac{3}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma\eta\nu^2 x = \frac{4}{4} - \frac{3}{4} \Leftrightarrow \sigma\eta\nu^2 x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sigma\eta\nu x = \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow \sigma\eta\nu x = \pm \frac{1}{2} \text{ απορ ή } \sigma\eta\nu x = -\frac{1}{2}$$

$$\epsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\eta\nu x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\frac{2\sqrt{3}}{2 \cdot 1} = -\sqrt{3}$$

$$\sigma\phi x = \frac{\sigma\eta\nu x}{\eta\mu x} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2 \cdot 1}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{1\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$A = \sqrt{3}\epsilon\phi x + 3\sqrt{3}\sigma\phi x - 2\sigma\eta\nu x = \sqrt{3}(-\sqrt{3}) + 3\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -3 - 3 + 1 = -5$$

Ασκήσεις προτεινόμενες

Αν $\eta\mu\omega = \frac{1}{2}$ και $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$, να βρεθούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας

Αν $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ και $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$, να βρεθούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας

Αν $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$, να βρεθούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας

Αν $\epsilon\phi\omega = \frac{\sqrt{3}}{3}$ και $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$, να βρεθούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας

5. Αν $\epsilon\phi\omega = \frac{\sqrt{3}}{3}$ και $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$, να βρεθούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας

Είναι $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$, (πρώτο τεταρτημόριο ΟΗΕΣ) άρα $\begin{cases} \eta\mu\omega > 0 \\ \sigma\upsilon\nu\omega > 0 \\ \epsilon\phi\omega > 0 \\ \sigma\phi\omega > 0 \end{cases}$

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1 + \epsilon\phi^2\omega} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{1}{1 + \frac{3}{9}} = \frac{1}{\frac{9}{9} + \frac{3}{9}} = \frac{1}{\frac{12}{9}} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \text{ άρα}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ή } \sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ απορ}$$

$$\text{Είναι } \eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \eta\mu^2\omega = 1 \Leftrightarrow \frac{3}{4} + \eta\mu^2\omega = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega = 1 - \frac{3}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu^2\omega = \frac{4}{4} - \frac{3}{4} \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \eta\mu\omega = \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow \eta\mu\omega = \frac{1}{2} \text{ απορ ή } \sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{1}{2}$$

5

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

6. Να αποδείξετε τις ταυτότητες

i. $\frac{\sigma\upsilon\nu^2x}{1+\eta\mu x} + \eta\mu x = 1$

ii. $\sigma\upsilon\nu x \left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x} + \epsilon\phi x \right) = 1$

iii. $\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\sigma\upsilon\nu x} + 1 \right) \eta\mu^2x = 1 + \sigma\upsilon\nu x$

iv. $\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\sigma\upsilon\nu x} + 1 - \frac{\sigma\phi x}{\eta\mu x} = \frac{1}{\eta\mu^2x}$

Λύση

i. $\frac{\sigma\upsilon\nu^2x}{1+\eta\mu x} + \eta\mu x = \frac{\sigma\upsilon\nu^2x}{1+\eta\mu x} + \frac{\eta\mu x(1+\eta\mu x)}{(1+\eta\mu x)} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2x}{1+\eta\mu x} + \frac{\eta\mu x + \eta\mu^2x}{(1+\eta\mu x)} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2x + \eta\mu x + \eta\mu^2x}{1+\eta\mu x} = \frac{1+\eta\mu x}{(1+\eta\mu x)} = 1$

ii. $\sigma\upsilon\nu x \left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x} + \epsilon\phi x \right) = \sigma\upsilon\nu x \left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x} + \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \right) = \frac{\sigma\upsilon\nu^2x}{1+\eta\mu x} + \eta\mu x = \frac{\sigma\upsilon\nu^2x}{1+\eta\mu x} + \frac{\eta\mu x(1+\eta\mu x)}{(1+\eta\mu x)} =$
 $= \frac{\sigma\upsilon\nu^2x}{1+\eta\mu x} + \frac{\eta\mu x + \eta\mu^2x}{(1+\eta\mu x)} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2x + \eta\mu x + \eta\mu^2x}{1+\eta\mu x} = \frac{1+\eta\mu x}{(1+\eta\mu x)} = 1$

iii. $\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\sigma\upsilon\nu x} + 1 \right) \eta\mu^2x = \left(\frac{\sigma\upsilon\nu x(1+\sigma\upsilon\nu x)}{(1-\sigma\upsilon\nu x)(1+\sigma\upsilon\nu x)} + 1 \right) \eta\mu^2x = \left(\frac{\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^2x}{1-\sigma\upsilon\nu^2x} + 1 \right) \eta\mu^2x =$
 $= \left(\frac{\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^2x}{\eta\mu^2x} + \frac{\eta\mu^2x}{\eta\mu^2x} \right) \eta\mu^2x = \left(\frac{\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^2x + \eta\mu^2x}{\eta\mu^2x} \right) \eta\mu^2x = 1 + \sigma\upsilon\nu x$

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{1 - \sin x} + 1 - \frac{\cos x}{\eta \mu x} &= \frac{\sin x(1 + \sin x)}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} + 1 - \frac{\frac{\sin x}{\eta \mu x}}{\eta \mu x} = \frac{\sin x + \sin^2 x}{1 - \sin^2 x} + 1 - \frac{\sin x}{\eta \mu^2 x} = \\ &= \frac{\sin x + \sin^2 x}{\eta \mu^2 x} + \frac{\eta \mu^2 x}{\eta \mu^2 x} - \frac{\sin x}{\eta \mu^2 x} \\ &= \frac{\sin x - \sin x + \sin^2 x + \eta \mu^2 x}{\eta \mu^2 x} = \frac{1}{\eta \mu^2 x}\end{aligned}$$

7. Να αποδείξετε την ταυτότητα

i. $\frac{\sin x}{1 - \sin x} - \frac{\cos x}{\eta \mu x} = \frac{1 - \eta \mu^2 x}{\eta \mu^2 x} = \varepsilon \varphi^2 x$	ii. $\left(\frac{\sin x}{1 - \sin x} + 1\right) \frac{\eta \mu^2 x}{1 + \sin x} = 1$
--	--

Λύση

$$\begin{aligned}\text{i. } \frac{\sin x}{1 - \sin x} - \frac{\cos x}{\eta \mu x} &= \frac{\sin x(1 + \sin x)}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} - \frac{\frac{\sin x}{\eta \mu x}}{\eta \mu x} = \frac{\sin x + \sin^2 x}{1 - \sin^2 x} - \frac{\sin x}{\eta \mu^2 x} = \\ &= \frac{\sin x + \sin^2 x}{\eta \mu^2 x} - \frac{\sin x}{\eta \mu^2 x} = \frac{\sin x - \sin x + \sin^2 x}{\eta \mu^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\eta \mu^2 x} = \varepsilon \varphi^2 x \\ \text{ii. } \left(\frac{\sin x}{1 - \sin x} + 1\right) \frac{\eta \mu^2 x}{1 + \sin x} &= \left(\frac{\sin x}{1 - \sin x} + \frac{1 - \sin x}{1 - \sin x}\right) \frac{\eta \mu^2 x}{1 + \sin x} = \\ &= \left(\frac{\sin x + 1 - \sin x}{1 - \sin x}\right) \frac{\eta \mu^2 x}{1 + \sin x} = \frac{1}{1 - \sin x} \frac{\eta \mu^2 x}{1 + \sin x} = \frac{\eta \mu^2 x}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} = \\ &= \frac{\eta \mu^2 x}{1 - \sin^2 x} = \frac{\eta \mu^2 x}{\eta \mu^2 x} = 1\end{aligned}$$

8. Να αποδείξετε την ταυτότητα

$$\frac{\eta \mu x + \varepsilon \varphi x}{\sin x + \cos x} \sigma \varphi^2 x = \frac{\sin x + 1}{\eta \mu x + 1}$$

Λύση

$$\frac{\eta \mu x + \varepsilon \varphi x}{\sin x + \cos x} \sigma \varphi^2 x = \frac{\eta \mu x + \frac{\sin x}{\eta \mu x}}{\sin x + \frac{\sin x}{\eta \mu x}} \sigma \varphi^2 x = \frac{\eta \mu x \left(1 + \frac{1}{\sin x}\right) \sin^2 x}{\sin x \left(1 + \frac{1}{\eta \mu x}\right) \eta \mu^2 x} = \frac{\sin x \left(1 + \frac{1}{\sin x}\right)}{\eta \mu x \left(1 + \frac{1}{\eta \mu x}\right)} = \frac{\sin x + 1}{\eta \mu x + 1}$$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

9. να αποδείξετε την ανισότητα

$$-\sqrt{2} \leq \eta \mu x - \sin x \leq \sqrt{2}$$

Λύση

$$-\sqrt{2} \leq -\sqrt{2} \leq \eta \mu x - \sin x \leq \sqrt{2}$$

$$-\sqrt{2} \leq \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow |\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x| \leq 2 \Leftrightarrow |\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x|^2 \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x - 2 \cdot (\eta\mu x)(\sigma\upsilon\nu x) \leq 2\eta\mu^2 x + 2\sigma\upsilon\nu^2 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 \cdot (\eta\mu x)(\sigma\upsilon\nu x) \leq 2\eta\mu^2 x + 2\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x \leq \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x + 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$$

$$0 \leq (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2$$

Ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$

10. να αποδείξετε την ανισότητα

$$-5 \leq 3\eta\mu x + 4\sigma\upsilon\nu x \leq 5$$

Λύση

$$-5 \leq 3\eta\mu x + 4\sigma\upsilon\nu x \leq 5 \Leftrightarrow |3\eta\mu x + 4\sigma\upsilon\nu x| \leq 5 \Leftrightarrow |3\eta\mu x + 4\sigma\upsilon\nu x|^2 \leq 25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9\eta\mu^2 x + 16\sigma\upsilon\nu^2 x + 2 \cdot (3\eta\mu x)(4\sigma\upsilon\nu x) \leq 25\eta\mu^2 x + 25\sigma\upsilon\nu^2 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 25\eta\mu^2 x + 25\sigma\upsilon\nu^2 x - 9\eta\mu^2 x - 16\sigma\upsilon\nu^2 x - 2 \cdot (3\eta\mu x)(4\sigma\upsilon\nu x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 16\eta\mu^2 x + 9\sigma\upsilon\nu^2 x - 2 \cdot (4\eta\mu x)(3\sigma\upsilon\nu x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq (4\eta\mu x - 3\sigma\upsilon\nu x)^2$$

11. Αν $\gamma^2 + \beta^2 = \alpha^2$ τότε να δείξετε ότι

$$-\alpha \leq \gamma\eta\mu x + \beta\sigma\upsilon\nu x \leq \alpha$$

Λύση

$$-\alpha \leq \gamma\eta\mu x + \beta\sigma\upsilon\nu x \leq \alpha \Leftrightarrow |\gamma\eta\mu x + \beta\sigma\upsilon\nu x| \leq \alpha \Leftrightarrow |\gamma\eta\mu x + \beta\sigma\upsilon\nu x|^2 \leq \alpha^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \gamma^2\eta\mu^2 x + \beta^2\sigma\upsilon\nu^2 x + 2(\gamma\eta\mu x)(\beta\sigma\upsilon\nu x) \leq \alpha^2\eta\mu^2 x + \alpha^2\sigma\upsilon\nu^2 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \gamma^2\eta\mu^2 x + \beta^2\sigma\upsilon\nu^2 x + 2(\gamma\eta\mu x)(\beta\sigma\upsilon\nu x) - \alpha^2\eta\mu^2 x - \alpha^2\sigma\upsilon\nu^2 x \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\gamma^2 - \alpha^2)\eta\mu^2 x + (\beta^2 - \alpha^2)\sigma\upsilon\nu^2 x + 2(\gamma\eta\mu x)(\beta\sigma\upsilon\nu x) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-\beta^2)\eta\mu^2 x + (-\gamma^2)\sigma\upsilon\nu^2 x + 2(\beta\eta\mu x)(\gamma\sigma\upsilon\nu x) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta^2\eta\mu^2 x + \gamma^2\sigma\upsilon\nu^2 x - 2(\beta\eta\mu x)(\gamma\sigma\upsilon\nu x) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\beta\eta\mu x + \gamma\sigma\upsilon\nu x)^2 \geq 0$$