ΘΕΜΑ Α
Α1.
Να αποδείξετε ότι, αν η συνάρτηση $\boldsymbol{f}$ είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα $\boldsymbol{\Delta}$, τότε είναι και συνεχής στο $\boldsymbol{\Delta}$.
Μονάδες 7
Α2. Να δώσετε τον ορισμό της παράγουσας μιας συνάρτησης $\boldsymbol{f}$ σε ένα διάστημα $\boldsymbol{\Delta}$. Μονάδες 4
Α3. Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του ορισμένου ολοκληρώματος $\int_a^b \boldsymbol{f(x)\,dx}$ όταν $\boldsymbol{f(x) \geq 0}$ για κάθε $\boldsymbol{x \in [a, b]}$.
Μονάδες 4
Α4.
Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λανθασμένες.
α) Αν $\boldsymbol{f'(x) > 0}$ σε ένα διάστημα $\boldsymbol{\Delta}$, τότε η $\boldsymbol{f}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\boldsymbol{\Delta}$.
β) Αν $\boldsymbol{F}$ είναι μια παράγουσα της $\boldsymbol{f}$ σε ένα διάστημα $\boldsymbol{\Delta}$, τότε κάθε παράγουσα της $\boldsymbol{f}$ είναι της μορφής $\boldsymbol{F(x) + c}$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}$.
γ) Αν $\boldsymbol{f}$ είναι συνεχής στο $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, τότε ισχύει πάντα $\int_a^b \boldsymbol{f(x)\,dx \geq 0}$.
δ) Αν $\boldsymbol{f}$ είναι περιττή και συνεχής στο $[-\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}]$, τότε $\int_{-a}^{a} \boldsymbol{f(x)\,dx = 0}$.
ε) Αν δύο συναρτήσεις έχουν ίσες παραγώγους σε ένα διάστημα, τότε είναι ίσες στο διάστημα αυτό.
Μονάδες 10
ΘΕΜΑ Α
Α1. Να αποδείξετε ότι, αν η συνάρτηση $\boldsymbol{f}$ είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα $\boldsymbol{\Delta}$, τότε είναι και συνεχής στο $\boldsymbol{\Delta}$.
Μονάδες: 7
Απάντηση
Έστω $x_0 \in \Delta$.
Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, υπάρχει το όριο $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$.

Επειδή το όριο υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, έχουμε: $\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right) = \lambda \in \mathbb{R}$.

Γράφουμε: $f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)$.

Άρα, παίρνοντας όρια για $x \to x_0$, $\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = \left(\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right) \cdot \left(\lim_{x \to x_0} (x - x_0)\right) = \lambda \cdot 0 = 0$.

Επομένως $\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Α2. Να δώσετε τον ορισμό της παράγουσας μιας συνάρτησης $\boldsymbol{f}$ σε ένα διάστημα $\boldsymbol{\Delta}$.
Μονάδες: 4
Απάντηση
Μια συνάρτηση F λέγεται παράγουσα της f σε ένα διάστημα Δ, όταν ισχύει

$$F'(x) = f(x), \text{για κάθε } x \in \Delta.$$

Α3. Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του ορισμένου ολοκληρώματος $\int_a^b f(x)\,dx$ όταν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.
Μονάδες: 4
Απάντηση Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$, τότε το ορισμένο ολοκλήρωμα

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

εκφράζει το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = a$, $x = b$.

Α4. Σωστό ή Λάθος
Μονάδες: 10
Απαντήσεις
α) Σ
β) Σ
γ) Λ
δ) Σ
ε) Λ