ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2, x \in \mathbb{R}$.

Β1. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f και τα τοπικά ακρότατά της. Μονάδες 8

Β2.Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της. Μονάδες 8

Β3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x = 1$. Μονάδες 4

Β4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες. Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Β

Β1. Μονοτονία και ακρότατα

Απάντηση

x	-∞		0		2		+∞
f΄(x)		+	0	-	0	+	
f(x)		↗		↘	ΣΚ	↗	

Υπολογίζουμε παράγωγο: $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$.
Κρίσιμα σημεία: $f'(x) = 0 \iff x = 0$ ή $x = 2$.
Πίνακας προσήμου της $f'(x)$:

- για $x < 0$: $f'(x) > 0$
- για $0 < x < 2$: $f'(x) < 0$
- για $x > 2$: $f'(x) > 0$

Άρα η f:

- είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, 0)$και $(2, +\infty)$
- είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 2)$

Ακρότατα:

- στο $x = 0$, η f αλλάζει από αύξουσα σε φθίνουσα, άρα παρουσιάζει τοπικό μέγιστο:

$$f(0) = 2$$

- στο $x = 2$, η f αλλάζει από φθίνουσα σε αύξουσα, άρα παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο:

$$f(2) = 8 - 12 + 2 = -2$$

Β2. Κυρτότητα και σημεία καμπής

Απάντηση $f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$
Άρα:

- για $x < 1$, $f''(x) < 0$, άρα η f είναι κοίλη
- για $x > 1$, $f''(x) > 0$, άρα η f είναι κυρτή

Στο $x = 1$, η f'' αλλάζει πρόσημο, άρα το σημείο είναι σημείο καμπής. $f(1) = 1 - 3 + 2 = 0$
Άρα σημείο καμπής είναι το $K(1,0)$.

Β3. Εφαπτομένη στο $x = 1$

Μονάδες: 4

Απάντηση

$$f(1) = 0, f'(1) = 3 - 6 = -3$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο (1,0)είναι $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$
δηλαδή $y = -3(x - 1) \Rightarrow y = -3x + 3.$

B4. Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$x^3 - 3x^2 + 2 = 0$$

έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.
Μονάδες: 5

Απάντηση

Θέτουμε

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2.$$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
Υπολογίζουμε:

$\boldsymbol{f(0) = 2,}$

$$\boldsymbol{f(2) = 2^3 - 3(2)^2 + 2 = 8 - 12 + 2 = -2}$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^3 - 3x^2 + 2) = \lim_{x\to-\infty} (x^3) = -\infty}$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x^3 - 3x^2 + 2) = \lim_{x\to+\infty} (x^3) = +\infty}$$

Ισχύουν

Η f είναι συνεχής και γνησίως Αύξουσα στο διάστημα. $\boldsymbol{(-\infty, 0]}$ ***άρα*** $\boldsymbol{f\big((-\infty, 0]\big) = (-\infty, 2\,]}$ ***και*** $\boldsymbol{0 \epsilon (-\infty, 2]}$ $\acute{\alpha}\rho\alpha\ \eta$ $\boldsymbol{f}$ ***Έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα*** $\boldsymbol{(-\infty, 0\,]}$ ***την*** $\boldsymbol{x_1}$ ***Η οποία είναι μοναδική επειδή η συνάρτηση είναι Γνησίως αύξουσα στο*** $\boldsymbol{(-\infty, 0]}$

Η f είναι συνεχής και γνησίως Αύξουσα στο διάστημα. $\boldsymbol{[2, +\infty)}$ ***άρα*** $\boldsymbol{f([2, +\infty)\,) = [-2, +\infty)}$ ***και*** $\boldsymbol{0 \epsilon [-2, +\infty)}$ $\acute{\alpha}\rho\alpha\ \eta$ $\boldsymbol{f}$ ***Έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα*** $\boldsymbol{[2, +\infty)}$ ***την*** $\boldsymbol{x_3}$ ***Η οποία είναι μοναδική επειδή η συνάρτηση είναι Γνησίως αύξουσα στο*** $\boldsymbol{[2, +\infty)}$

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα. $\boldsymbol{[0-, 2]}$ ***άρα*** $\boldsymbol{f([0, 2]\,) = [-2, 2]}$ ***και*** $\boldsymbol{0 \epsilon [-2, 2]}$ $\acute{\alpha}\rho\alpha\ \eta$ $\boldsymbol{f}$ ***Έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα*** $\boldsymbol{[0, 2]}$ ***την*** $\boldsymbol{x_2}$ ***Η οποία είναι μοναδική επειδή η συνάρτηση είναι Γνησίως φθίνουσα στο [0,2]***

Και επειδή

$\boldsymbol{x_1 \in (-\infty, 0\,]}$ ***άρα*** $\boldsymbol{x_1 < 0}$ ***άρα***

$\boldsymbol{x_2 \in [0, 2]}$ ***άρα*** $\boldsymbol{0 < x_2 < 2}$ ***άρα***

$\boldsymbol{x_3 \in [2, +\infty)}$ ***άρα*** $\boldsymbol{2 < x_3}$

Οπότε $\boldsymbol{x_1 < 0 < x_2 < 2 < x_3}$ ***Οπότε η εξίσωση έχει ακριβώς τρεις πραγματικες ρίζες.***

Παρατήρηση

Στο Β4 Λύνεται εύκολα με χόρνερ Εφ.

$$x^3 - 3x^2 + 2 = (x - 1)(x^2 - 2x - 2)$$

οπότε

$$x = 1 ή x^2 - 2x - 2 = 0$$

και από τη δευτεροβάθμια:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

Άρα οι τρεις πραγματικές ρίζες είναι:

$$x_1 = 1 - \sqrt{3}, x_2 = 1, x_3 = 1 + \sqrt{3}$$