

Ένας αριθμός α λέμε ότι είναι **μεγαλύτερος** από έναν αριθμό β , και γράφουμε $\alpha > \beta$, όταν η διαφορά $\alpha - \beta$ είναι θετικός αριθμός.

Ένας αριθμός α λέμε ότι είναι μεγαλύτερος από έναν αριθμό β , και γράφουμε $\alpha > \beta$, όταν η διαφορά $\alpha - \beta$ είναι θετικός αριθμός.

Διαστήματα

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών x με $\alpha \leq x \leq \beta$

λέγεται **κλειστό διάστημα** από α μέχρι β και συμβολίζεται με: $[\alpha, \beta]$

Αν τώρα από το κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ παραλείψουμε τα α και β , προκύπτει το αντίστοιχο **ανοικτό διάστημα** από το α μέχρι το β , που συμβολίζεται με: (α, β)

Οι αριθμοί α και β λέγονται **άκρα** των διαστημάτων αυτών και κάθε αριθμός μεταξύ των α και β λέγεται **εσωτερικό σημείο** αυτών.

Η διαφορά, δηλαδή, μεταξύ ενός κλειστού και του αντίστοιχου ανοικτού διαστήματος είναι ότι το πρώτο περιέχει τα άκρα του, ενώ το δεύτερο δεν τα περιέχει.

Άλλες μορφές διαστημάτων είναι:

- Το **ανοικτό δεξιά** διάστημα (α, β) , που αποτελείται από τους αριθμούς x για τους οποίους ισχύει:
$$\alpha < x < \beta$$

- Το **ανοικτό αριστερά** διάστημα $(\alpha, \beta]$, που αποτελείται από τους αριθμούς x για τους οποίους ισχύει:
$$\alpha < x \leq \beta$$

Τέλος, υπό μορφή διαστήματος:

- Το σύνολο των αριθμών x για τους οποίους ισχύει $\alpha \leq x$ συμβολίζεται με:
$$[\alpha, +\infty)$$

- Το σύνολο των αριθμών x για τους οποίους ισχύει $x \leq \alpha$ συμβολίζεται με:
$$(-\infty, \alpha]$$

Με ανάλογο τρόπο ορίζονται και τα διαστήματα:

$$(\alpha, +\infty)$$

και

$$(-\infty, \alpha)$$

Τα σύμβολα $+\infty$ και $-\infty$, που διαβάζονται «συν άπειρο» και «πλην άπειρο» αντιστοίχως, δεν παριστάνουν πραγματικούς αριθμούς.

Στον παρακάτω πίνακα συνοψίζονται οι μορφές διαστημάτων πραγματικών αριθμών και οι διάφορες αναπαράστάσεις τους.

- Ορισμος

Η **απόλυτη τιμή** ενός πραγματικού αριθμού α συμβολίζεται με $|\alpha|$ και ορίζεται από τον τύπο:

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha & \text{αν } \alpha \geq 0 \\ -\alpha & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$$

- Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε αμέσως ότι:

$$|\alpha| = |- \alpha| \geq 0$$

$$|\alpha| \geq \alpha \text{ και } |\alpha| \geq -\alpha$$

$$|\alpha|^2 = \alpha^2$$

$$|\alpha^{\nu}| = |\alpha|^{\nu} \quad \nu \in \mathbb{N}$$

$$|x| = |\alpha| \Leftrightarrow x = \alpha \text{ ή } x = -\alpha$$

- Αν $\theta > 0$, τότε:

i. $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta \text{ ή } x = -\theta$

ii. $|x| < \theta \Leftrightarrow x \in (-\theta, \theta) \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$

iii. $|x| > \theta \Leftrightarrow x < -\theta \text{ ή } x > \theta$

- Η απόσταση δύο πραγματικών αριθμών α και β δίνεται από τον τύπο:

$$d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Από τον τρόπο εκτέλεσης των πράξεων μεταξύ πραγματικών αριθμών, προκύπτουν για τις απόλυτες τιμές οι ακόλουθες ιδιότητες:

i. $ \alpha \cdot \beta = \alpha \beta $	ii. $\frac{ \alpha }{ \beta } = \frac{ \alpha }{ \beta } \quad \mu\epsilon \beta \neq 0$	iii. $ \alpha + \beta \leq \alpha + \beta $
--	--	---

Να αποδείξετε ότι $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ (για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή και τα δύο μέλη της ισότητας $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} |\alpha \cdot \beta| &= |\alpha| \cdot |\beta| \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow |\alpha \cdot \beta|^2 &= (|\alpha| \cdot |\beta|)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\alpha \cdot \beta)^2 &= |\alpha|^2 \cdot |\beta|^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \alpha^2 \cdot \beta^2 &= \alpha^2 \cdot \beta^2, \text{ που ισχύει.} \end{aligned}$$

2. Η ιδιότητα του πηλίκου αποδεικνύεται με ανάλογο τρόπο, για $\beta \neq 0$.

Να αποδείξετε ότι $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ (για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)

3. Επειδή και τα δύο μέλη της ανισότητας $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} |\alpha + \beta| &\leq |\alpha| + |\beta| \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow |\alpha + \beta|^2 &\leq (|\alpha| + |\beta|)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 &\leq |\alpha|^2 + 2|\alpha||\beta| + |\beta|^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 &\leq \alpha^2 + 2|\alpha||\beta| + \beta^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2\alpha\beta &\leq 2|\alpha||\beta| \Leftrightarrow \\ \alpha\beta &\leq |\alpha||\beta| \text{ που ισχύει.} \end{aligned}$$

Είναι φανερό ότι η ισότητα $\alpha\beta = |\alpha\beta|$ ισχύει αν και μόνο αν $\alpha\beta \geq 0$, δηλαδή αν και μόνο αν οι αριθμοί α και β είναι ομόσημοι ή τουλάχιστον ένας από αυτούς είναι ίσος με μηδέν.

Το μήκος του τμήματος AB λέγεται **απόσταση** των αριθμών α και β , συμβολίζεται με $d(\alpha, \beta)$ και είναι ίση με $|\alpha - \beta|$. Είναι δηλαδή:

$$d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|$$

ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η **τετραγωνική ρίζα** ενός μη αρνητικού αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt{\alpha}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός που, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον α .

Μπορούμε επομένως να πούμε ότι:

Αν $\alpha \geq 0$, η $\sqrt{\alpha}$ παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^2 = \alpha$.

Για τις τετραγωνικές ρίζες μη αρνητικών αριθμών γνωρίσαμε τις παρακάτω ιδιότητες

N-οστή ΡΙΖΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η **n-οστή ρίζα** ενός μη αρνητικού αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt[n]{\alpha}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός⁽¹⁾ που, όταν υψωθεί στην n , δίνει τον α .

Ιδιότητες ριζών

Από τον ορισμό της ν-οστής ρίζας ενός μη αρνητικού αριθμού α , συμπεραίνουμε αμέσως ότι

Αν $\alpha \geq 0$, τότε:

$$(\sqrt[n]{\alpha})^n = \alpha \text{ και } \sqrt[n]{\alpha^n} = \alpha$$

Αν $\alpha \leq 0$ και n άρτιος, τότε:

$$\sqrt[n]{\alpha^n} = |\alpha|$$

Αν $\alpha \geq 0$ και $\beta \geq 0$, τότε

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{\alpha}\sqrt[n]{\beta} &= \sqrt[n]{\alpha\beta} \\ \frac{\sqrt[n]{\alpha}}{\sqrt[n]{\beta}} &= \sqrt[n]{\frac{\alpha}{\beta}} \text{ εφόσον } \beta \neq 0 \\ \sqrt[m]{\sqrt[n]{\alpha}} &= \sqrt[m \cdot n]{\alpha} \\ \sqrt[m \cdot p]{\alpha^{m \cdot p}} &= \sqrt[m]{\alpha^p}\end{aligned}$$

Απόδειξη

1. Έχουμε:

$$\sqrt[n]{\alpha}\sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{\alpha\beta} \Leftrightarrow (\sqrt[n]{\alpha}\sqrt[n]{\beta})^n = (\sqrt[n]{\alpha\beta})^n \Leftrightarrow (\sqrt[n]{\alpha})^n (\sqrt[n]{\beta})^n = \alpha\beta \Leftrightarrow \alpha\beta = \alpha\beta \text{ που ισχύει.}$$

2. Αποδεικνύεται όπως και η 1.

3. Έχουμε:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{\alpha}} = \sqrt[m \cdot n]{\alpha} \Leftrightarrow (\sqrt[m]{\sqrt[n]{\alpha}})^{m \cdot n} = (\sqrt[m \cdot n]{\alpha})^{m \cdot n} \Leftrightarrow ((\sqrt[n]{\alpha})^m)^n = \alpha \Leftrightarrow (\sqrt[n]{\alpha})^m = \alpha \Leftrightarrow \alpha = \alpha \text{ που ισχύει.}$$

4. Έχουμε:

$$\begin{aligned}\sqrt[m \cdot p]{\alpha^{m \cdot p}} &= \sqrt[m]{\alpha^p} \\ (\sqrt[m \cdot p]{\alpha^{m \cdot p}}) &= (\sqrt[p]{\sqrt[m]{(\alpha^m)^p}}) = (\sqrt[m]{\alpha^p})\end{aligned}$$

ορισμός

Αν $\alpha > 0$, μ ακέραιος και n θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε: $\alpha^{\frac{\mu}{n}} = \sqrt[n]{\alpha^\mu}$

Να λυθεί η Εξίσωση $ax + \beta = 0$

Έχουμε $ax + \beta = 0 \Leftrightarrow ax + \beta - \beta = -\beta \Leftrightarrow ax = -\beta$

Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

- Αν $\alpha \neq 0$ τότε: $ax = -\beta \Leftrightarrow x = -\frac{\beta}{\alpha}$

Επομένως, αν $\alpha \neq 0$ η εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση, την $x = -\frac{\beta}{\alpha}$.

- Αν $\alpha = 0$, τότε η εξίσωση $ax = -\beta$ γίνεται $0x = -\beta$, η οποία:

1. αν είναι $\beta \neq 0$ δεν έχει λύση και γι αυτό λέμε ότι είναι **αδύνατη**, ενώ
2. αν είναι $\beta = 0$ έχει τη μορφή $0x = 0$ και αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x δηλαδή είναι **ταυτότητα**.

Η λύση της εξίσωσης $ax + \beta = 0$ και γενικά κάθε εξίσωσης λέγεται και **ρίζα** αυτής.

Έστω η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$, με $\alpha \neq 0$ (I)

Τότε η αλγεβρική παράσταση $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$, ονομάζεται **διακρίνουσα** αυτής και από την τιμή της διακρίνουσας εξαρτάται το πλήθος των ριζών της εξίσωσης ,

Και συγκεκριμένα

η εξίσωση (I) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, όταν $\Delta > 0$

η εξίσωση (I) έχει διπλή ρίζα όταν $\Delta=0$

η εξίσωση (I) έχει πραγματικές ρίζες όταν $\Delta \geq 0$

η εξίσωση (I) δεν έχει πραγματικές ρίζες όταν $\Delta < 0$

1. αν x_1, x_2 είναι ρίζες της $ax^2+bx+\gamma=0$, να αποδείξετε ότι $S=x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{a}$

Απόδειξη

$$x_1 + x_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} + \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{(-\beta + \sqrt{\Delta}) + (-\beta - \sqrt{\Delta})}{2\alpha} = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta} - \beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2\beta}{2\alpha} = -\frac{\beta}{a}$$

2. Αν x_1, x_2 είναι ρίζες της $ax^2+bx+\gamma=0$, να αποδείξετε ότι $P=x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{a}$

Απόδειξη

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \cdot \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{(-\beta)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4\alpha^2} = \frac{\beta^2 - \Delta}{4\alpha^2} = \frac{\beta^2 - (\beta^2 - 4\alpha\gamma)}{4\alpha^2} = \frac{\beta^2 - \beta^2 + 4\alpha\gamma}{4\alpha^2} = \frac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2} = \frac{\gamma}{a}$$

3. Πότε μια ακολουθία λέγεται αριθμητική πρόοδος;

Μια ακολουθία λέγεται **αριθμητική πρόοδος**, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού.

Τον αριθμό αυτό τον συμβολίζουμε με ω και τον λέμε **διαφορά της προόδου**.

4. Πότε μια ακολουθία λέγεται γεωμετρική πρόοδος;

Μια ακολουθία λέγεται **γεωμετρική πρόοδος**, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενο με πολλαπλασιασμό επί τον ίδιο πάντοτε μη μηδενικό αριθμό.

Τον αριθμό αυτό τον συμβολίζουμε με λ και τον λέμε **λόγος της προόδου**.

Σε μια γεωμετρική πρόοδο (α_n) υποθέτουμε πάντα ότι $\alpha_1 \neq 0$, οπότε, αφού είναι και $\lambda \neq 0$, ισχύει $\alpha_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Ορισμός συνάρτησης

Συνάρτηση από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B λέγεται μια διαδικασία — κανόνας — με την οποία κάθε στοιχείο του συνόλου A αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου B.

Τι λέγεται γραφική παράσταση της f και πώς συμβολίζεται;

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων $M(x, y)$, για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, $x \in A$, λέγεται **γραφική παράσταση** της f και συμβολίζεται συνήθως με C_f .
