

Δ Ι Α Ν Υ Σ Μ Α Τ Α

Για να δείξουμε ότι τα σημεία M και N ταυτίζονται, αρκεί να δείξουμε ότι $\vec{MN} = \vec{0}$

1. Αν ισχύει $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MG} = \vec{NA} + \vec{NB} + \vec{NG}$, δείξτε ότι τα M και N ταυτίζονται

Λύση: Είναι $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MG} - \vec{NA} - \vec{NB} - \vec{NG} = \vec{0} \Leftrightarrow$

$$\left(\vec{MA} - \vec{NA} \right) + \left(\vec{MB} - \vec{NB} \right) + \left(\vec{MG} - \vec{NG} \right) = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\left(\vec{MA} + \vec{AN} \right) + \left(\vec{MB} + \vec{BN} \right) + \left(\vec{MG} + \vec{GN} \right) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{MN} + \vec{MN} + \vec{MN} = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$3\vec{MN} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{MN} = \vec{0} \Leftrightarrow \text{τα M, N ταυτίζονται.}$$

Για να δείξουμε ότι $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$, αρκεί να δείξουμε ότι $\vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}, \lambda \in R$.

Αν $\lambda > 0$, τότε τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι ομόρροπα και αν $\lambda < 0$, τότε τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι αντίρροπα.

2. Αν Δ, Ε είναι τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ σε τρίγωνο ΑΒΓ, δείξτε ότι $\Delta E // B\Gamma$ και $\Delta E = B\Gamma / 2$

Λύση: Είναι $\vec{\Delta E} = \vec{\Delta A} + \vec{AE} = \frac{1}{2}\vec{BA} + \frac{1}{2}\vec{AG} = \frac{1}{2}(\vec{BA} + \vec{AG}) = \frac{1}{2}\vec{BG}$

Άρα $\Delta E // B\Gamma$ και $\Delta E = B\Gamma / 2$

Για να δείξουμε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\vec{AB} = \lambda \vec{AG} \text{ ή } \vec{AB} = \lambda \vec{BG}, \lambda \in R$$

3. Αν ισχύει $5\vec{OA} + 2\vec{OB} = 7\vec{OG}$, να δείξτε ότι τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά

Λύση: είναι $5\vec{OA} + 2\vec{OB} = 7\vec{OG} \Leftrightarrow 5\vec{OA} + 2\vec{OB} - 7\vec{OG} = \vec{0} \Leftrightarrow$

$$5\vec{OA} + 2\vec{OB} - 5\vec{OG} - 2\vec{OG} = \vec{0} \Leftrightarrow 5\vec{GA} + 2\vec{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{GA} = -\frac{2}{5}\vec{GB} \Leftrightarrow \text{τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά}$$

Για δυο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει: $||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|| \leq |\vec{\alpha} \pm \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$ (τριγωνική ανισότητα).

Οι ισότητες ισχύουν, όταν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι συνευθειακά.

- **Αν $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| \Rightarrow \vec{\alpha} \nearrow \vec{\beta}$**

Αν $\vec{\alpha} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} = \vec{0}$ ισχύει. Έστω ότι $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και $\vec{\beta} \neq \vec{0}$.

Επειδή $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$, υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $\vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}$, οπότε: $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| \Leftrightarrow$

$$|(\lambda + 1)\vec{\beta}| = |\vec{\beta}| (|\lambda| + 1) \Leftrightarrow |\lambda + 1| = |\lambda| + 1 \Leftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 1 = \lambda^2 + 2|\lambda| + 1 \Leftrightarrow |\lambda| = \lambda \Leftrightarrow \lambda > 0 \Rightarrow \vec{\alpha} \nearrow \vec{\beta}$$

- **Αν $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| \Rightarrow \vec{\alpha} \nearrow \vec{\beta}$**

- **Αν $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = ||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|| \Rightarrow \vec{\alpha} \nwarrow \vec{\beta}$**

- **Αν $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = ||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|| \Rightarrow \vec{\alpha} \nwarrow \vec{\beta}$**

4. Αν $|\vec{\alpha}|(|\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|) + |\vec{\beta}|(|\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|) = |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2$, να δείξετε ότι $\vec{\alpha} \nearrow \vec{\beta}$.

Έχω $(|\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|)^2 = |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| = |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$, οπότε $\vec{\alpha} \nearrow \vec{\beta}$.

Αν ζητάμε να βρούμε σημείο M που ικανοποιεί μια διανυσματική σχέση, τότε μετατρέπουμε τη σχέση, συνδέοντας το M με ένα μόνο από τα υπόλοιπα σημεία

5. Σε παρ/μο ABΓΔ να βρείτε σημείο M, έτσι ώστε να ισχύει η σχέση

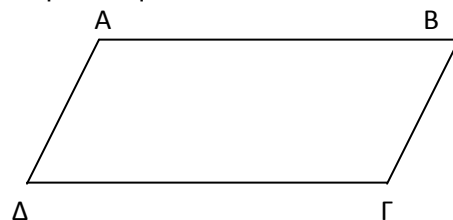
$$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MG} = \vec{MD}$$

Λύση: είναι $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MG} = \vec{MD} \Leftrightarrow$

$$\vec{MA} + (\vec{MA} + \vec{AB}) + (\vec{MA} + \vec{AG}) = \vec{MA} + \vec{AD} \Leftrightarrow$$

$$2\vec{MA} = -\vec{AB} - \vec{AG} + \vec{AD} \Leftrightarrow$$

$$2\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{AG} - \vec{AD} \Leftrightarrow 2\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{AG} + \vec{GB} \Leftrightarrow 2\vec{AM} = 2\vec{AB}, \text{ οπότε το M ταυτίζεται με το B}$$



Αν θέλουμε να δείξουμε μια σχέση της μορφής $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n = n\vec{a}$ τότε ή

εκφράζουμε καθένα από τα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ με την βοήθεια του $\vec{a}$ ή εκφράζουμε το $\vec{a}$

, n- φορές, με την βοήθεια ενός από τα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$

6. Αν G, G' είναι τα βαρύκεντρα δυο τριγώνων ABΓ, A'B'Γ' δείξτε ότι

$$\vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{GG'} = 3\vec{GG'}$$

Λύση: 1ος τρόπος:

$$\text{είναι } \vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{GG'} = \vec{AG} + \vec{GG'} + \vec{GA'} + \vec{BG} + \vec{GG'} + \vec{GB'} + \vec{GG} + \vec{GG'} + \vec{GT'} = 3\vec{GG'}$$

2ος τρόπος: είναι $\vec{GG'} = \vec{GA} + \vec{AA'} + \vec{A'G'}$

$$\vec{GG'} = \vec{GB} + \vec{BB'} + \vec{B'G'}$$

$$\vec{GG'} = \vec{G\Gamma} + \vec{\Gamma\Gamma'} + \vec{\Gamma'G'}$$

$$\text{Άρα } 3\vec{GG'} = (\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{G\Gamma}) + (\vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{\Gamma\Gamma'}) + (\vec{A'G'} + \vec{B'G'} + \vec{\Gamma'G'}) \Leftrightarrow$$

$$3\vec{GG'} = \vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{\Gamma\Gamma'}$$

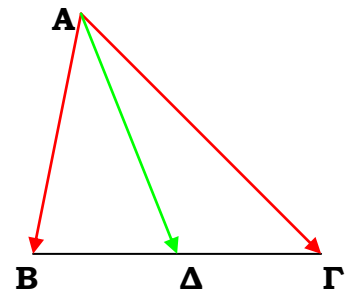
Σε ασκήσεις που εμφανίζονται μέσα ευθυγράμμων τμημάτων, μας διευκολύνει η ιδιότητα της διαμέσου τριγώνου ABΓ:

7. Αν ΑΔ διάμεσος τριγ. ABΓ, τότε $\vec{A\Delta} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{A\Gamma})$

Λύση: είναι $\vec{A\Delta} = \vec{AB} + \vec{B\Delta}$ και $\vec{A\Delta} = \vec{A\Gamma} + \vec{\Gamma\Delta}$ οπότε

$$2\vec{A\Delta} = \vec{AB} + \vec{B\Delta} + \vec{A\Gamma} + \vec{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow 2\vec{A\Delta} = \vec{AB} + \vec{A\Gamma} \Leftrightarrow$$

$$\vec{A\Delta} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{A\Gamma}) \text{ αφού } \vec{B\Delta} = -\vec{\Gamma\Delta}$$



8. Σε κύκλο (Ο,ρ) θεωρούμε δυο κάθετες χορδές ΑΒ,ΓΔ που τέμνονται στο Μ. Δείξτε ότι

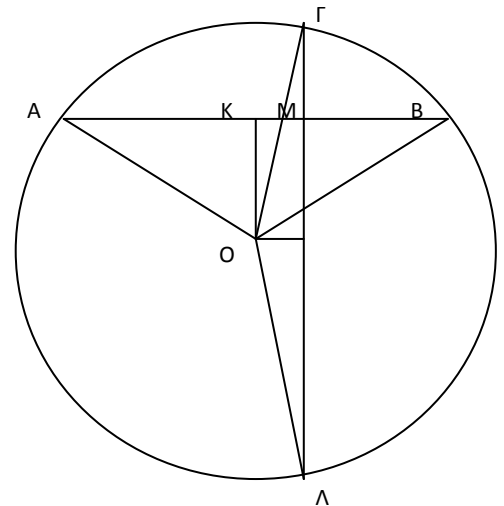
$$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MG} + \vec{MD} = 2\vec{MO}$$

Λύση: είναι $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MG} + \vec{MD} =$

$$\vec{MO} + \vec{OA} + \vec{MO} + \vec{OB} + \vec{MO} + \vec{OG} + \vec{MO} + \vec{OD}$$

$$= 4\vec{MO} + (\vec{OA} + \vec{OB}) + (\vec{OG} + \vec{OD}) = 4\vec{MO} + 2\vec{OM}$$

$$= 2\vec{MO}$$



ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Για να δείξουμε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, \psi_1)$, $\vec{\beta} = (x_2, \psi_2)$ είναι κάθετα, αρκεί να

δείξουμε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$ ή $x_1x_2 + \psi_1\psi_2 = 0$

Αν $\vec{\alpha}=(1,0)$ και $\vec{\beta}=(1,1)$, εξετάστε αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι κάθετα. Βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\alpha} + \lambda \vec{\beta}$ να είναι κάθετα

Λύση: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1 \neq 0$, οπότε τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δεν είναι κάθετα

$$\text{Πρέπει } \vec{\alpha} \cdot (\vec{\alpha} + \lambda \vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha} + \lambda \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}|^2 + \lambda \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1^2 + 0^2} + \lambda \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow 1 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$$

Για να βρούμε την γωνία ω δυο διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ χρησιμοποιούμε τη σχέση

$$\cos \omega = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| |\vec{\beta}|}, \text{ όπου } 0 \leq \omega < 2\pi$$

Αν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$ και $\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta} \right) = \frac{2\pi}{3}$ να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}$ και

$$\vec{v} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$$

Λύση: είναι $\cos \left(\vec{u}, \vec{v} \right) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$ (1)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (2\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha} - 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 4\vec{\beta} \cdot \vec{\alpha} - 4\vec{\beta} \cdot \vec{\beta} = 2|\vec{\alpha}|^2 - 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 4\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 4|\vec{\beta}|^2 = 2 - 2\cos \left(\vec{\alpha}, \vec{\beta} \right) + 4\cos \left(\vec{\alpha}, \vec{\beta} \right) - 4 = -2 + 2\cos \left(\vec{\alpha}, \vec{\beta} \right) \quad (2)$$

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \cos \left(\vec{\alpha}, \vec{\beta} \right) = 1 \cdot 1 \cdot \cos \left(\vec{\alpha}, \vec{\beta} \right) = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$|\vec{u}|^2 = (2\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}) \cdot (2\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}) = 4\vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha} + 16\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 16\vec{\beta} \cdot \vec{\beta} = 4 + 16(-1/2) + 16 = 12 \quad (4)$$

$$|\vec{v}|^2 = (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = \vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha} - 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\beta} = 1 - 2(-1/2) + 1 = 3 \quad (5)$$

Από **(1),(2),(3),(4),(5)** έχω $\text{συν}\left(\overset{\wedge}{\vec{u}, \vec{v}}\right) = \frac{2 + \left(-\frac{1}{2}\right) - 4}{\sqrt{12}\sqrt{3}} = -\frac{1}{2} = -\text{συν}(\pi/3) = \text{συν}(\pi - \pi/3) =$

$\text{συν}(2\pi/3)$. Άρα $\left(\overset{\wedge}{\vec{u}, \vec{v}}\right) = 2\pi/3$

Όταν έχουμε σχέση με μέτρα διανυσμάτων, για να μπορέσουμε να δουλέψουμε υψώνουμε στο τετράγωνο, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $\left|\vec{a}\right|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$

Να εξετάσετε πότε ισχύει $\left|\vec{a} + \vec{\beta}\right| = \left|\vec{a}\right| + \left|\vec{\beta}\right|$

Λύση: $\left|\vec{a} + \vec{\beta}\right|^2 = \left(\left|\vec{a}\right| + \left|\vec{\beta}\right|\right)^2 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{\beta} \cdot \vec{\beta} + 2\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{\beta}\right|^2 + 2\left|\vec{a}\right|\left|\vec{\beta}\right| \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{\beta}\right| \Leftrightarrow$

$\left|\vec{a}\right|\left|\vec{\beta}\right| \text{συν}\left(\overset{\wedge}{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{\beta}\right| \Leftrightarrow \text{συν}\left(\overset{\wedge}{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = 1 \Leftrightarrow \left(\overset{\wedge}{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha}, \vec{\beta} \text{ ομόρροπα.}$

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

1. Σε κάθε τρίγωνο ABΓ με διαμέσους $\vec{A\Delta}, \vec{B\Xi}, \vec{\Gamma Z}$ είναι $\vec{A\Delta} + \vec{B\Xi} + \vec{\Gamma Z} = \vec{0}$
2. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{A'B'}$. Αν Μ και Μ' τα μέσα των $\vec{AB}$ και $\vec{A'B'}$ να δείξετε ότι $\vec{AA'} + \vec{BB'} = 2\vec{MM'}$.
3. Δίνεται παραλληλόγραμμο ABΓΔ και Σ τυχαίο σημείο του επιπέδου του. Να δείξετε ότι $\vec{\Sigma A} + \vec{\Sigma \Gamma} = \vec{\Sigma B} + \vec{\Sigma \Delta}$.
4. Δίνεται παραλληλόγραμμο ABΓΔ και Σ τυχαίο σημείο του επιπέδου του ώστε $\vec{\Sigma B} = -5\vec{\Sigma \Gamma}$. Να δείξετε ότι $\vec{\Sigma A} + \vec{\Sigma \Delta} + 4\vec{\Sigma \Gamma} = 2\vec{BA}$.

5. Αν $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1\}$ και $\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \lambda \vec{OB}}{1 + \lambda}$, όπου Ο τυχαίο σημείο, να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Μ είναι συνευθειακά.

6. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύει $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ και $3|\vec{\alpha}| = 4|\vec{\beta}| = 12|\vec{\gamma}|$, να δείξετε

ότι: $\vec{\beta} \uparrow \uparrow \vec{\gamma}$ και $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$

ΥΠΟΔΕΙΞΗ: θέτω $3|\vec{\alpha}| = 4|\vec{\beta}| = 12|\vec{\gamma}| = \kappa$, οπότε $|\vec{\alpha}| = \kappa/3$, $|\vec{\beta}| = \kappa/4$, $|\vec{\gamma}| = \kappa/12$ και

$$|\vec{\beta}| + |\vec{\gamma}| = |\vec{\alpha}| = |-\vec{\beta} - \vec{\gamma}| = |\vec{\beta} + \vec{\gamma}|$$

7. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε των ΑΒ, ΑΓ τέτοια ώστε $\vec{AD} = \frac{1}{3} \vec{AB}$ και $\vec{AE} = \frac{3}{4} \vec{AG}$. Να δείξετε ότι τα ΒΕ, ΓΔ τέμνονται σε σημείο Ρ και να εκφράσετε το $\vec{AP}$ με την βοήθεια των $\vec{AB}, \vec{AG}$

ΥΠΟΔΕΙΞΗ: αν $BE // \Delta\Gamma$ τότε θα υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$: $\vec{BE} = \lambda \vec{\Delta\Gamma} \Leftrightarrow \frac{3}{4} \vec{AG} - \vec{AB} = \frac{\lambda}{3} \vec{AB} - \lambda \vec{AG}$,

άτοπο. Είναι $\vec{AP} = \vec{AB} + \vec{BP} = \vec{AB} + \mu \vec{BE}$ και $\vec{AP} = \vec{AG} + \vec{GP} = \vec{AG} + \nu \vec{\Gamma\Delta}$

8. Δίνονται τα τυχαία μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ και τα σημεία Ο, Α, Β, Γ τέτοια ώστε $\vec{OA} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta} + 3\vec{\gamma}$, $\vec{OB} = \vec{\alpha} + 3\vec{\beta} - \vec{\gamma}$, $\vec{OG} = 5\vec{\alpha} - 13\vec{\beta} + 15\vec{\gamma}$. Να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

9. Έστω ότι $|\vec{\alpha}| = 4$, $|\vec{\beta}| = 5$ και $\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta} \right) = 2\pi/3$. Αν $\vec{\delta} = 2\vec{\alpha} - 5\vec{\beta}$, να υπολογίσετε το μέτρο του $\vec{\delta}$.

10. Έστω ότι $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$ και $\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta} \right) = 2\pi/3$. Αν $\vec{\delta} = 3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$, να υπολογίσετε τις γωνίες $\left(\vec{\delta}, \vec{\alpha} \right)$ και $\left(\vec{\delta}, \vec{\beta} \right)$.

- 11.** Έστω ότι $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=3$ και $\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right)=2\pi/3$. Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{u}=\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$ και $\vec{v}=\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$.
- 12.** Να βρείτε τα διανύσματα που είναι κάθετα στο $\vec{a}=(2,5)$ και έχουν μέτρο $3\sqrt{29}$.
- 13.** Να αναλύσετε το $\vec{\beta}=(8,1)$ σε δύο κάθετες συνιστώσες, από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο $\vec{a}=(2,-2)$.
- 14.** Έστω ότι $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=3$, $|\vec{\gamma}|=1$ και $2\vec{\alpha}-\vec{\beta}+3\vec{\gamma}=\vec{0}$, να υπολογίσετε το $A=2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+4\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}-\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$
- 15.** Αν $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=|\vec{\gamma}|=1$ και $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=-2$, να δείξετε ότι $\vec{\alpha}=\vec{\gamma}=-\vec{\beta}$.