ΛΥΣΗ

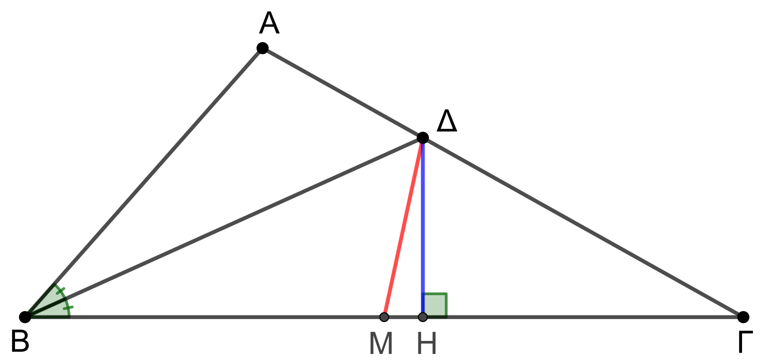
α) Στα τρίγωνα ΔΒΓ και ΑΒΔ, οι γωνίες $\Delta\widehat{B}\Gamma$ και $A\widehat{B}\Delta$ είναι ίσες, αφού η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B}$ του τριγώνου ΑΒΓ. Επομένως ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Άρα

$\frac{(\Delta B\Gamma)}{(AB\Delta)} = \frac{B\Delta \cdot B\Gamma}{B\Delta \cdot BA} = \frac{B\Gamma}{BA} = \frac{2BA}{BA} = 2$, άρα $(\Delta B\Gamma) = 2(AB\Delta)$.

β) Έστω Μ το μέσο της ΒΓ. Τότε η διάμεσος ΔΜ του τριγώνου ΔΒΓ το χωρίζει σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα ΔΜΒ και ΔΜΓ, αφού αυτά έχουν ίσες βάσεις $MB = M\Gamma$ και κοινό ύψος το ΔΗ από την κορυφή Δ. Επομένως θα έχουμε

$(\Delta MB) = (\Delta M\Gamma) = \frac{1}{2}(\Delta B\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot 2(AB\Delta) = (AB\Delta)$, άρα

$(AB\Delta) = (\Delta MB) = (\Delta M\Gamma)$.



γ)

i. Είναι $AB = 12$, $B\Gamma = 2AB = 2 \cdot 12 = 24$ και $\eta\mu\, B = \frac{3}{4}$.

Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot B\Gamma \cdot BA \cdot \eta\mu\, B$

ή $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 12 \cdot \frac{3}{4}$ ή $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 12 \cdot \frac{3}{4} = 108$ ή $(AB\Gamma) = 108$.

ii. Στο α) ερώτημα βρήκαμε ότι $(\Delta B\Gamma) = 2(AB\Delta)$ και στο γ) i) $(AB\Gamma) = 108$.

Όμως $(\Delta B\Gamma) + (AB\Delta) = (AB\Gamma)$, άρα $2(AB\Delta) + (AB\Delta) = (AB\Gamma)$ ή $3(AB\Delta) = 108$ ή $(AB\Delta) = 36$.

Επίσης θα είναι $(\Delta B\Gamma) = 2 \cdot 36 = 72$.