Ασκήσεις επανάληψης

1. Να βρείτε τη γωνία μεταξύ των διανυσμάτων αβ(1,0)

Λύση

Από τον τύπο

Η γωνία των δύο διανυσμάτων είναι 45 μοίρες.

1. Αν Κ(2λ+1, 3λ-1) σημείο του επιπέδου

Να δείξετε ότι το σημείο κινείται στην ευθεία 3x-2y-5=0.

**Λύση**

**Α τρόπος**

Θέτουμε x= 2λ+1 και y= 3λ-1. Λύνοντας ως προς λ και τις έχουμε

Εξισώνοντας τις δύο σχέσεις βρίσκουμε

Από όπου προκύπτει 3x-2y-5=0.

**Β τρόπος**

Αντικαθιστώντας x=2λ+1 και y=3λ-1 στην ευθεία 3x-2y-5=0 έχουμε ότι

3(2λ+1)-2(3λ-1)-5= 6λ+3-6λ+2-5=0 που ισχύει.

1. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας 3x-2y-5=0 με τους άξονες x’x και y’y.

Λύση

Για να βρούμε το σημείο τομής με τον x’x θέτω y=0 στην ευθεία οπότε

3x-5=0 άρα . Το σημείο τομής με τον x’x είναι Κ

Για να βρούμε το σημείο τομής με τον y’y θέτω x=0 στην ευθεία οπότε

-2y-5=0 άρα . Το σημείο τομής με το y’y είναι Λ( ) .

1. Δίνεται εξίσωση

Να βρείτε την κωνική τομή της παρακάτω εξίσωσης

Λύση

**Α τρόπος**

Η εξίσωση είναι της μορφής

Οπότε είναι κύκλος με κέντρο Κ και ακτίνας

Άρα είναι κύκλος κέντρου Κ(8,3) και ακτίνας ρ=

**Β τρόπος**

Να προσπαθήσουμε να κάνουμε τέλεια τετράγωνα μέσω ταυτοτήτων

Η εξίσωση

Ισοδύναμα γράφεται

Ισοδύναμα

ή

ή που είναι εξίσωση κύκλου κέντρου Κ(8,3) και ακτίνας .

1. Να εξετάσετε αν η ευθεία 3x-2y-5=0 εφάπτεται στον κύκλο.

Λύση

Α τρόπος

Για να εξετάσουμε αν εφάπτεται στον κύκλο αρκεί η απόσταση του κέντρου του κύκλου Κ(8,3) από την ευθεία να είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου.

Θα πρέπει δηλαδή

 d(K,ε)=.

Πράγματι

B τρόπος

Να λύσουμε σύστημα της εξίσωσης κύκλου με την 3x-2y-5=0

Οπότε

1.

Αντικαθιστώντας την (2) στην (1) έχουμε

Κάνοντας τις πράξεις ταυτότητα και επιμεριστική και

Για να είναι εφαπτόμενη πρέπει η διακρίνουσα Δ=0 δηλαδή να έχουμε μια διπλή ρίζα. Πράγματι

 Άρα η 3x-2y-5=0 είναι η εφαπτομένη του κύκλου.

1. Να βρείτε το σημείο τομής του κύκλου με την εφαπτομένη

Λύση

Το σημείο τομής είναι η διπλή ρίζα της δευτεροβάθμιας του προηγούμενου ερωτήματος

 άρα

Αντικαθιστώντας x=5 στην εξίσωση της ευθείας έχουμε

15-2y-5=0 ή άρα y=5

To σημείο τομής της ευθείας με το κύκλο που εφάπτονται είναι Α(5,5).

1. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η εφαπτομένη 3x-2y-5=0 με τους άξονες

Λύση

Λύση από προηγούμενα ερωτήματα (2) έχουμε βρει τα σημεία τομής με τους άξονες

Είναι τα σημεία Κ και Λ( ) .

Αν το Ο(0,0) η αρχή των αξόνων

Βρίσκουμε λοιπόν τα διανύσματα ή

Όμοια βρίσκουμε

Άρα

1. Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει η ευθεία 3x-2y-5=0 με τον x’x

Λύση

Λύνοντας ως προς y έχουμε

Από πίνακα βιβλίου ή κομπιούτερ έχουμε φ=55,60

Έλλειψη

1. Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης που έχει εστίες Ε’(-4, 0) και Ε(4,0) και εκκεντρότητα

Λύση

Από την εκκεντρότητα έχουμε

 άρα

α=5 από τις εστίες βρίσκουμε γ=4

Ισχύει άρα άρα

Άρα η εξίσωση της έλλειψης είναι ή

1. Να βρεθεί η εφαπτομένη/ες της έλλειψης που βρήκαμε στο ερώτημα 8. που είναι παράλληλη στην ευθεία

Λύση

Η εφαπτόμενη της έλλειψης έχει εξίσωση

Λύνοντας ως προς y έχουμε

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας 1 είναι

Αφού οι δύο ευθείες είναι παράλληλες έχουν ίδιο συντελεστή διεύθυνσης άρα

 άρα (1\*)

Το σημείο είναι σημείο της εφαπτομένης άρα επαληθεύει την εξίσωση της έλλειψης . Αντικαθιστώντας τώρα στην εξίσωση της έλλειψης έχουμε

Αντικαθιστώντας στην (1\*) έχουμε

 ή

 ή

Α και Β

Δείτε και τα θέματα της τράπεζας θεμάτων

Υπερβολή

1. Αφού αιτιολογήσετε ότι η εξίσωση

Είναι υπερβολή, να βρείτε τις εστίες , την εκκεντρότητα της και τις ασύμπτωτες της.

Λύση

Διαιρώντας όλους τους όρους της εξίσωσης με το 144 έχουμε

Ότι η εξίσωση παίρνει τη μορφή

 που είναι της μορφής

Οι εστίες έχουν τη μορφή ) και

Υπολογίζουμε άρα γ==5

Άρα γ=5 οι εστίες είναι ) και

Η εκκεντρότητα είναι ή

Οι ασύμπτωτες είναι της μορφής και

Δηλαδή οι

1. Να εξετάσετε αν το σημείο Κ(4,0) είναι σημείο της υπερβολής και να βρείτε την εφαπτόμενη της υπερβολής που περνάει από το σημείο αυτό.

Λύση

Το σημείο Κ(4,0) είναι σημείο της υπερβολής διότι επαληθεύει την εξίσωσή της, πράγματι αντικαθιστώντας στην το Κ(4,0) έχουμε

9\*16-16\*0=144 που ισχύει.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής είναι

Αντικαθιστώντας και έχουμε άρα x=4 είναι η εξίσωση της εφαπτομένης.

Παραβολή

1. Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής όταν έχει εστία Ε( -1,0)

Λύση

Επειδή έχει εστία την Ε ισχύει άρα p=-2 άρα

η εξίσωση της παραβολής είναι

1. Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής που έχει διευθετούσα

Λύση

 άρα η εξίσωση της παραβολής είναι .

1. Να εξετάσετε αν το σημείο Κ(1,-2) ανήκει στην υπερβολή και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής σε αυτό το σημείο.

Λύση

Πράγματι για x=1 και y=-2 έχουμε αντικαθιστώντας στην ότι είναι σημείο της παραβολής διότι την επαληθεύει .

Η εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής είναι

Για έχουμε

ή

Γενικά επειδή είναι 3 τα κεφάλαια του βιβλίου και τα θέματα θέλουμε να καλύπτουν όλα τα κεφάλαια συνήθως η εξέταση καλύπτει την ύλη. Να διαβάσετε όλα τα κεφάλαια καθώς τα διανύσματα και τις κωνικές τομές. Διαβάσετε από την τράπεζα θεμάτων ασκήσεις σε όλες τις ενότητες.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!