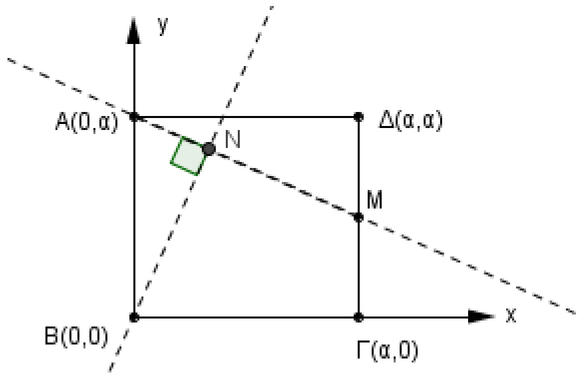
ΛΥΣΗ



α) i. Στο τρίγωνο ΑΔΜ έχουμε $(ΑΔ) = α$ και $(ΜΔ) = \frac{α}{2}$, άρα $λ_{AM} = -\frac{1}{2}$. Επίσης, από την υπόθεση, οι ευθείες ΑΜ και ΒΝ είναι κάθετες, οπότε $λ_{AM} \cdot λ_{BN} = -1$. Συνεπώς, $λ_{BN} = 2$.

Έτσι, η εξίσωση της ευθείας ΑΜ είναι: $y - y_A = λ_{AM}(x - x_A)$, δηλαδή $y - α = -\frac{1}{2}(x - 0)$ ή ισοδύναμα $y = -\frac{1}{2}x + α$.

ii. Όμοια, η εξίσωση της ευθείας ΒΝ είναι: $y - y_B = λ_{BN}(x - x_B)$, δηλαδή $y - 0 = 2(x - 0)$, ή ισοδύναμα $y = 2x$.

β) Οι συντεταγμένες του σημείου Ν, ως σημείο τομής των ευθειών ΑΜ και ΒΝ, είναι η λύση του συστήματος $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + α \\ y = 2x \end{cases}$.

Όμως, $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + α \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{1}{2}x + α \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{2}x = α \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2α}{5} \\ y = \frac{4α}{5} \end{cases}$.

Άρα, $N(\frac{2α}{5}, \frac{4α}{5})$.

γ) Η απόσταση του σημείου $N(\frac{2α}{5}, \frac{4α}{5})$ από το σημείο $Γ(α, 0)$ είναι ίση με:

$$\sqrt{(x_Γ - x_N)^2 + (y_Γ - y_N)^2} = \sqrt{(α - \frac{2α}{5})^2 + (0 - \frac{4α}{5})^2} = \sqrt{(\frac{3α}{5})^2 + (\frac{4α}{5})^2} = \sqrt{\frac{25α^2}{25}} = α.$$

Άρα, το σημείο Ν ανήκει σε κύκλο με κέντρο Γ και ακτίνα ίση με α. Αφού ο ζητούμενος κύκλος έχει κέντρο το σημείο $Γ(α, 0)$ και ακτίνα α, έπεται ότι έχει εξίσωση: $(x - α)^2 + y^2 = α^2$.