ΛΥΣΗ

α) Αρκεί να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\mu \in R$ έτσι ώστε $\overrightarrow{B\Gamma} = \mu\, \overrightarrow{BM}$.

Πράγματι, θεωρώντας το *B* ως σημείο αναφοράς, είναι:

$\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{A\Gamma} = \vec{0} \Rightarrow$

$\overrightarrow{AB} - 2\left(\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BA}\right) + \left(\overrightarrow{B\Gamma} - \overrightarrow{BA}\right) = \vec{0} \Rightarrow$

$\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{B\Gamma} - \overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{BM} \Rightarrow$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{B\Gamma} = 2\overrightarrow{BM} \Rightarrow \overrightarrow{B\Gamma} = 2\overrightarrow{BM}$

β) Το *M* είναι το μέσο του τμήματος *BΓ*, διότι

$\overrightarrow{B\Gamma} = 2\overrightarrow{BM} \Rightarrow \overrightarrow{B\Gamma} - \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BM} \Rightarrow \overrightarrow{M\Gamma} = \overrightarrow{BM}$

γ) i. Επειδή τα σημεία *A, B, Γ* ως κορυφές τριγώνου δεν είναι συνευθειακά, έπεται ότι τα μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ δεν είναι παράλληλα.

Είναι $\kappa\, \overrightarrow{A\Gamma} = \lambda\, \overrightarrow{AB}$.

Αν $\kappa \neq 0$, τότε $\kappa\, \overrightarrow{A\Gamma} = \lambda\, \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{A\Gamma} = \frac{\lambda}{\kappa}\, \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{A\Gamma} // \overrightarrow{AB}$.

Αν $\lambda \neq 0$, τότε $\kappa\, \overrightarrow{A\Gamma} = \lambda\, \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{\kappa}{\lambda}\, \overrightarrow{A\Gamma} \Rightarrow \overrightarrow{A\Gamma} // \overrightarrow{AB}$.

Επομένως πρέπει $\kappa = \lambda = 0$.

ii) Τότε είναι: $\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = 0 \\ \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{B\Gamma} = 0 \end{cases}$

Αφού $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = 0$ έπεται ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι κάθετα. Επομένως, το τρίγωνο είναι ορθογώνιο, με $\hat{A} = 90°$.

Αφού $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{B\Gamma} = 0$ έπεται ότι η διάμεσος *AM* του ορθογώνιου τριγώνου είναι κάθετη στην πλευρά *BΓ*, δηλαδή είναι και ύψος.

Ως εκ τούτου το τρίγωνο είναι και ισοσκελές με $AB = A\Gamma$.