ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση της μορφής $x^2+y^2+\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0$ παριστάνει κύκλο με κέντρο $\mathrm{K}\left(-\frac{\mathrm{A}}{2},-\frac{\mathrm{B}}{2}\right)$

και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma}}{2}$, αν και μόνο αν $\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma>0$.

Για την εξίσωση (1) έχουμε:

$$\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma=4-4(-8)=36>0,$$

δηλαδή παριστάνει κύκλο με κέντρο $\mathrm{K}(1,0)$ και ακτίνα $\rho_1=3$.

Όμοια για την (2) έχουμε:

$$\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma=36-4\cdot 8=4>0,$$

δηλαδή παριστάνει κύκλο με κέντρο $\Lambda(3,0)$ και ακτίνα $\rho_2=1$.

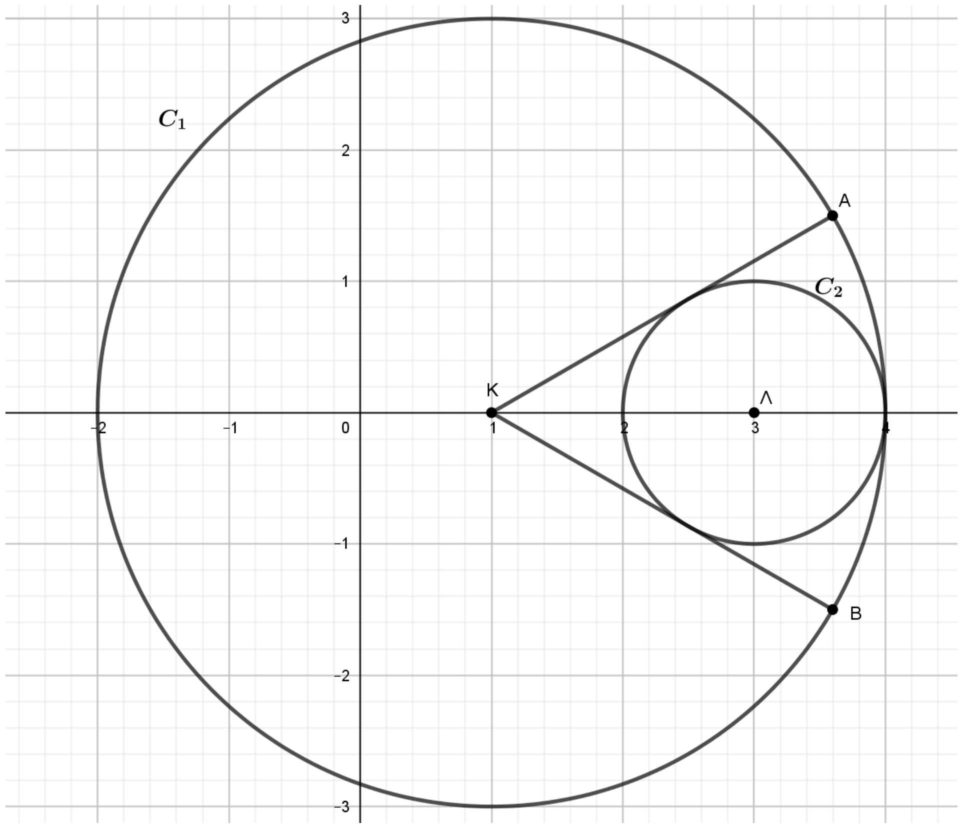
β)

i. Έχουμε $(\mathrm{K}\Lambda)=\sqrt{(3-1)^2+0^2}=2$.

ii. Δύο κύκλοι με κέντρα K, Λ και ακτίνες ρ_1 και ρ_2 αντίστοιχα εφάπτονται εσωτερικά αν και μόνο αν $(\mathrm{K}\Lambda)=|\rho_1-\rho_2|=\rho_1-\rho_2$, όπως γνωρίζουμε από την Ευκλείδεια γεωμετρία. Είναι $\rho_1-\rho_2=3-1=2$, από β)i. έχουμε $(\mathrm{K}\Lambda)=2=\rho_1-\rho_2$, δηλαδή ικανοποιείται η προϋπόθεση οπότε ο κύκλος C_2 εφάπτεται εσωτερικά του κύκλου C_1.

γ) Κάθε ακτίνα του κύκλου C_1, KA και KB σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα, που δεν είναι κάθετη στον $x'x$ άξονα, είναι πάνω σε ευθεία η οποία διέρχεται από το σημείο $\mathrm{K}(1,0)$ και έχει κλίση $\lambda\in\mathbb{R}$. Άρα θα έχει εξίσωση:

$$(\varepsilon):\ y-0=\lambda(x-1)\Leftrightarrow y-\lambda x+\lambda=0,\quad \lambda\in\mathbb{R}.$$



Η (ε) θα εφάπτεται στον C_2 αν και μόνο αν $d(\Lambda,\varepsilon)=\rho_2$. Έχουμε:

$$d(\Lambda,\varepsilon)=\rho_2 \Leftrightarrow \frac{|0-3\lambda+\lambda|}{\sqrt{1+\lambda^2}}=1 \Leftrightarrow |2\lambda|=\sqrt{1+\lambda^2} \Leftrightarrow 3\lambda^2=1 \Leftrightarrow \lambda=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Τελικά οι ζητούμενες ακτίνες KA και KB έχουν εξισώσεις:

$$(\varepsilon_1):\ 3y-\sqrt{3}x+\sqrt{3}=0 \text{ και}$$

$$(\varepsilon_2):\ 3y+\sqrt{3}x-\sqrt{3}=0 \text{ αντίστοιχα.}$$