ΛΥΣΗ

α) Ο κύκλος C_1 έχει κέντρο $\mathrm{K}\left(-\frac{\mathrm{A}}{2},-\frac{\mathrm{B}}{2}\right)$, δηλαδή $\mathrm{K}\left(-\sqrt{2},0\right)$ και ακτίνα : $\rho_1=\frac{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma}}{2}=1$ και ο κύκλος C_2 έχει κέντρο $\Lambda\left(-\frac{\mathrm{A}}{2},-\frac{\mathrm{B}}{2}\right)$, δηλαδή $\Lambda\left(3\sqrt{2},0\right)$ και ακτίνα : $\rho_2=\frac{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma}}{2}=3$.

β)

i. Μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων $\mathrm{O}(0,0)$ και δεν είναι κάθετη στον $x'x$ άξονα έχει εξίσωση:

$$(\eta):\ y=\lambda x \Leftrightarrow y-\lambda x=0\ .$$

Η ευθεία (η) εφάπτεται και στους δύο κύκλους αν και μόνο αν οι αποστάσεις των κέντρων K και Λ από την ευθεία αυτή είναι ίσες με τις αντίστοιχες ακτίνες των κύκλων. Δηλαδή έχουμε:

$$d(\mathrm{K},\eta)=1 \qquad (1) \qquad \text{και}$$

$$d(\Lambda,\eta)=3 \qquad (2).$$

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2):

$$\begin{cases}\dfrac{\left|0+\sqrt{2}\lambda\right|}{\sqrt{1+\lambda^2}}=1\\[2ex] \dfrac{\left|0-3\sqrt{2}\lambda\right|}{\sqrt{1+\lambda^2}}=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left|\sqrt{2}\lambda\right|=\sqrt{1+\lambda^2}\\ \left|3\sqrt{2}\lambda\right|=3\sqrt{1+\lambda^2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\lambda^2=1+\lambda^2\\ 18\lambda^2=9+9\lambda^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=\pm1\\ \lambda=\pm1\end{cases} \Leftrightarrow \lambda=\pm1\,.$$

Άρα, από την αρχή των αξόνων διέρχονται δυο κοινές εφαπτόμενες των κύκλων, με εξισώσεις:

$$(\eta_1):y=-x \ \text{και}\ (\eta_2):y=x\,.$$

ii. Η αρχή των αξόνων $(0,0)$ είναι εσωτερικό σημείο της διακέντρου $\mathrm{K}\Lambda$, διότι η $\mathrm{K}\Lambda$ είναι πάνω στον άξονα $x'x$ και έχει άκρα τα σημεία $\mathrm{K}\left(-\sqrt{2},0\right)$ και $\Lambda\left(3\sqrt{2},0\right)$. Επομένως οι εφαπτόμενες που βρήκαμε στο βi) ερώτημα είναι εσωτερικές, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.