ΛΥΣΗ

α) Το μέσο K του τμήματος AB έχει συντεταγμένες $\left(\frac{-2+2}{2}, \frac{0-2}{2}\right)$ δηλαδή $(0,-1)$.

Το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ είναι:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\left(2-(-2)\right)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

β) Ο κύκλος C με διάμετρο AB έχει κέντρο $K(0,-1)$ και ακτίνα $\rho = \frac{|\overrightarrow{AB}|}{2} = \sqrt{5}$. Άρα η εξίσωση του κύκλου είναι:

$$C: x^2 + (y+1)^2 = 5.$$

γ) Έστω $M(x,y)$. Τότε $(ABM) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}\right)\right|$ με $\overrightarrow{AM} = (x+2, y)$ και $\overrightarrow{AB} = (4,-2)$

Οπότε:

$$\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}\right)\right| = 5 \Leftrightarrow \left|\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ x+2 & y \end{vmatrix}\right| = 10 \Leftrightarrow$$

$$|4y + 2(x+2)| = 10 \begin{cases} 4y + 2x + 4 = 10 \\ \text{ή} \\ 4y + 2x + 4 = -10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x + 4y - 6 = 0 \\ \text{ή} \\ 2x + 4y + 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ \text{ή} \\ x + 2y + 7 = 0 \end{cases}$$

δ) Για να εφάπτονται οι ε_1 και ε_2 στο κύκλο C πρέπει $d(K, \varepsilon_1) = d(K, \varepsilon_2) = \sqrt{5}$.

Είναι

$$d(K, \varepsilon_1) = \frac{|0 + 2(-1) - 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

και

$$d(K, \varepsilon_1) = \frac{|0 + 2(-1) + 7|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$$