ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση γράφεται

$$x^2-2x+1+y^2+4y+4=4 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=4$$

οπότε παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(1,-2)$ και ακτίνα $\rho=2$.

β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $(KM)>\rho$. Πραγματικά, είναι:

$$(KM)=\sqrt{(3-1)^2+(2+2)^2}=\sqrt{20}>2$$

οπότε το Μ βρίσκεται έξω από τον κύκλο.

γ) Όλες οι ευθείες που διέρχονται από το Μ είναι:

- Η κατακόρυφη ευθεία $x=3$. Η ευθεία αυτή απέχει από το κέντρο του κύκλου απόσταση $d=\dfrac{|1-3|}{\sqrt{1+0}}=2=\rho$. Άρα η κατακόρυφη ευθεία $x=3$ εφάπτεται στον κύκλο.
- Όλες οι μη κατακόρυφες ευθείες που είναι της μορφής $y-2=\lambda(x-3)$ δηλαδή $\lambda x-y-3\lambda+2=0$. Μια τέτοια ευθεία εφάπτεται στον κύκλο, μόνο όταν η απόσταση d του κέντρου Κ από αυτή είναι ίση με την ακτίνα ρ. Είναι:

$$d=2 \Leftrightarrow \frac{|\lambda+2-3\lambda+2|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=2 \Leftrightarrow \frac{|\lambda-2|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=1 \Leftrightarrow \lambda^2-4\lambda+4=\lambda^2+1 \Leftrightarrow \lambda=\frac{3}{4}$$

  Επομένως η άλλη εφαπτομένη του κύκλου που διέρχεται από το Μ είναι η:

  $y-2=\dfrac{3}{4}(x-3)$ που γράφεται $y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{4}$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι οι κοινές εφαπτόμενες των δυο κύκλων είναι οι ευθείες με εξισώσεις $x=3$ και $y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{4}$.