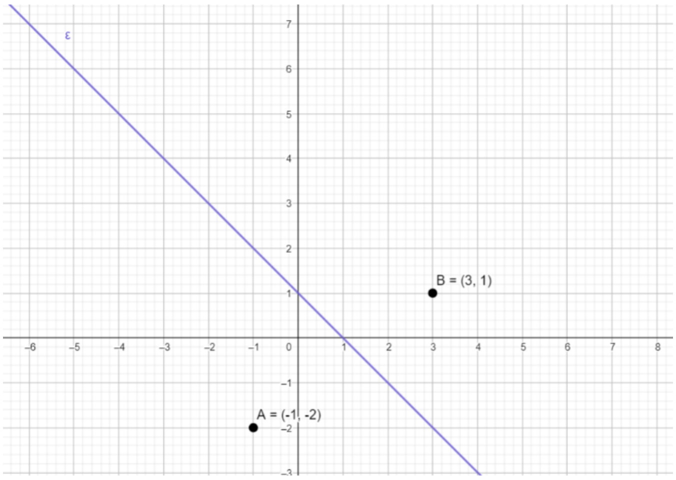
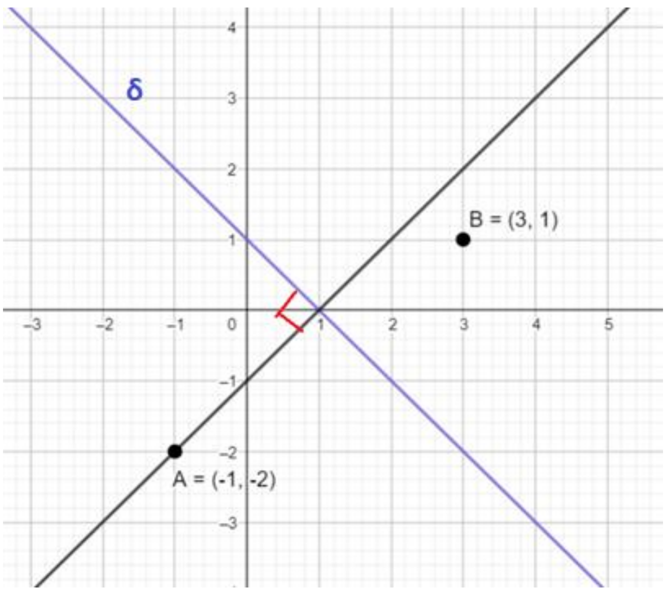
ΛΥΣΗ

α)

i. Για να βρούμε σε ποια θέση του δρόμου δ ο οικισμός Α έχει τη μικρότερη απόσταση, τοποθετούμε σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων την ευθεία δ και τα σημεία Α και Β. Η ευθεία δ τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y στα σημεία (1,0) και (0,1) αντίστοιχα.



Γνωρίζουμε πως ο πιο σύντομος δρόμος που μας οδηγεί στο προορισμό μας είναι ο κάθετος δρόμος στο δρόμο που βρισκόμαστε. Έτσι, η κάθετη ευθεία στην ευθεία δ που διέρχεται από το σημείο Α παριστάνει τον δρόμο που περνά από τον οικισμό και συναντιέται με τον δρόμο δ. Άρα, το σημείο που θα βρίσκεται η θέση που αναζητούμε είναι το σημείο τομής των δύο ευθειών.



Από το σχήμα προκύπτει πως είναι το $(1,0)$.

Για να το βρούμε αλγεβρικά αρκεί να προσδιορίσουμε την κάθετη ευθεία ε στην ευθεία δ που διέρχεται από το σημείο Α.

$\delta \perp \varepsilon$ αν και μόνο αν $\lambda_\delta \cdot \lambda_\varepsilon = -1$. Το $\lambda_\delta = -1$, άρα $\lambda_\varepsilon = 1$.

Τότε ε: $y-(-2) = 1 \cdot [x-(-1)] \Leftrightarrow x - y - 1 = 0$.

Λύνοντας το σύστημα εξισώσεων των δύο ευθείων ε και δ βρίσκουμε το ζητούμενο σημείο.

$\begin{cases} x+y-1=0 \\ x-y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$ και $y = 0$.

ii. Για να βρούμε τη θέση του κέντρου υγείας της περιοχής που ισαπέχει από τους δύο οικισμούς ακολουθούμε το ίδιο σκεπτικό. Από τη γραφική παράσταση ψάχνουμε το σημείο της ευθεία δ που ισαπέχει από τα Α και Β, δηλαδή το σημείο Γ που βρίσκεται πάνω στην ευθεία δ και στη μεσοκάθετο του AB.

Έστω σημείο $K(x, y)$ που ανήκει στην ευθεία δ, άρα οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας δ. Προσδιορίζουμε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του AB , την ευθεία ζ.

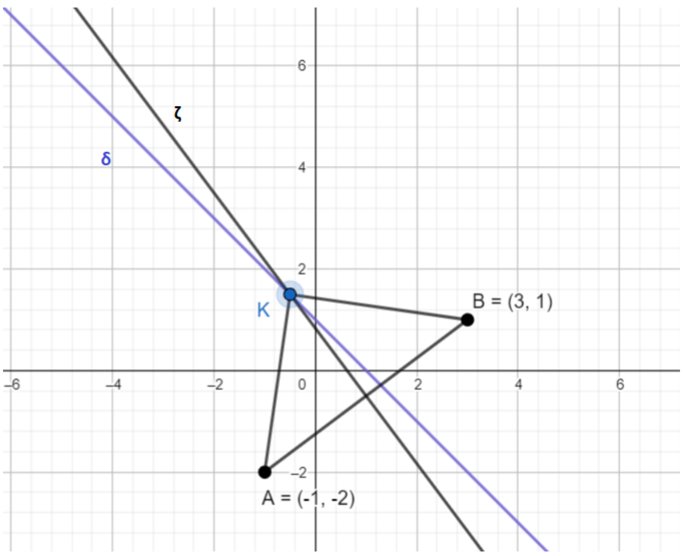
$\lambda_{AB} = \frac{1-(-2)}{3-(-1)} = \frac{3}{4}$ με $\lambda_{AB} \cdot \lambda_\zeta = -1$ τότε $\lambda_\zeta = -\frac{4}{3}$.

και το Μ μέσο του AB με συντεταγμένες, $x_M = \frac{-1+3}{2} = 1$, $y_M = \frac{-2+1}{2} = -\frac{1}{2}$.

ζ: $y + \frac{1}{2} = -\frac{4}{3}$(x-1)$\Leftrightarrow 8x + 6y - 5 = 0$.

Λύνουμε το σύστημα των δύο εξισώσεων δ και ζ

$\begin{cases} x+y-1=0 \\ 8x+6y-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ και $y = \frac{3}{2}$. Το σημείο $K(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ είναι το ζητούμενο, δηλαδή η θέση του δρόμου δ που βρίσκεται το κέντρο υγείας.



β) Το σημείο Γ βρίσκεται πάνω στο δρόμο με εξίσωση δ, άρα είναι σημείο της ευθείας δ.

Έστω $\Gamma(x, y)$ και $\Gamma \epsilon\ \delta: x + y - 1 = 0$, δηλαδή την επαληθεύει, τότε $y = 1 - x$ και

το σημείο Γ έχει συντεταγμένες $\Gamma(x, 1 - x)$.

Βρίσκουμε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

$\overrightarrow{AB} = (4,3)$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (x + 1, 3 - x)$.

Το εμβαδόν του τριγώνου $(AB\Gamma)$ είναι 8.

Άρα, από τον τύπο εμβαδόν τριγώνου $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}\right)\right|$ υπολογίζουμε ότι το $(AB\Gamma) =$

$$\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ x + 1 & 3 - x \end{vmatrix}\right| = 8 \Leftrightarrow |9 - 7x| = 16.$$

Από την εξίσωση παίρνουμε $x = -1$ ή $x = \frac{25}{7}$. Βρίσκουμε τα αντίστοιχα $y = 2$ ή $y = -\frac{18}{7}$.

Επομένως, έχουμε δύο θέσεις του δρόμου που βρίσκεται το αυτοκίνητο και σχηματίζει εμβαδόν 8,

τη θέση με συντεταγμένες $(-1,2)$ και $\left(\frac{25}{7}, -\frac{18}{7}\right)$.