ΛΥΣΗ

α) Παρατηρούμε ότι η $(\boldsymbol{I})$ είναι στη μορφή $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$, με

$A^2 + B^2 - 4\Gamma = (4 - 2k)^2 + [-2(1+k)]^2 - 4 \cdot (5 - 2k) =$

$16 - 16k + 4k^2 + 4 + 8k + 4k^2 - 20 + 8k = 8k^2$.

Αφού $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$, η $(\boldsymbol{I})$ παριστάνει κύκλο με ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{8k^2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}k}{2} = k\sqrt{2}$ και κέντρο $M\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = M\left(-\frac{4-2\kappa}{2}, -\frac{-2(1+k)}{2}\right) = M(k - 2, k + 1)$. Καθώς η παράμετρος k παίρνει άπειρες τιμές, έχουμε άπειρους κύκλους.

β) Ας είναι x η τετμημένη των σημείων M και y η τεταγμένη των σημείων M. Τότε:

$x = k - 2$, $y = k + 1$. Ώστε $y = (x + 2) + 1$, άρα $y = x + 3$, η εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία ανήκουν τα σημεία M.

γ) Προφανώς αρκεί να δείξουμε ότι η απόσταση των κέντρων Μ από την σταθερή ευθεία $(\varepsilon): x + y + 1 = 0$ ισούται με την ακτίνα. Πράγματι:

$d(M, \varepsilon) = \frac{|1(k-2)+1(k+1)+1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|2k|}{\sqrt{2}} = k\sqrt{2}$.