ΛΥΣΗ

α) Αφού $\beta \neq 0$ τα σημεία O, A, B δεν είναι συνευθειακά.

Τα τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές με βάση την OA αφού

$$(\mathrm{OB})=\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}-0\right)^2+(\beta-0)^2}=\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}+\beta^2} \text{ και } (\mathrm{AB})=\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}-\alpha\right)^2+(\beta-0)^2}=\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}+\beta^2}.$$

Εναλλακτικά, το σημείο $\mathrm{B}(\frac{\alpha}{2},\beta)$ ανήκει στη μεσοκάθετο του OA οπότε ισαπέχει από τα σημεία O,A.

Τέλος το μέσο του OA είναι το σημείο $\mathrm{M}(\frac{\alpha}{2},0)$, αφού οι συντεταγμένες του M είναι ίσες με το ημιάθροισμα των συντεταγμένων των O,A.

β) Είναι $\beta \neq 0$ οπότε $\mathrm{OB}: y-0=\dfrac{\beta-0}{\frac{\alpha}{2}-0}\cdot(x-0) \Leftrightarrow y=\dfrac{2\beta}{\alpha}\cdot x \Leftrightarrow 2\beta x-\alpha y=0$ και

$$\mathrm{AB}: y-0=\frac{\beta-0}{\frac{\alpha}{2}-\alpha}\cdot(x-\alpha) \Leftrightarrow y=\frac{\beta}{-\frac{\alpha}{2}}\cdot(x-\alpha) \Leftrightarrow y=-\frac{2\beta}{\alpha}\cdot(x-\alpha) \Leftrightarrow 2\beta x+\alpha y-2\alpha\beta=0.$$

γ) Είναι $d_1=\dfrac{\left|2\beta\frac{\alpha}{2}-\alpha\cdot 0\right|}{\sqrt{(2\beta)^2+\alpha^2}} \overset{\alpha,\beta>0}{=} \dfrac{\alpha\beta}{\sqrt{(2\beta)^2+\alpha^2}}$ και

$$d_2=\frac{\left|2\beta\frac{\alpha}{2}+\alpha\cdot 0-2\alpha\beta\right|}{\sqrt{(2\beta)^2+\alpha^2}}=\frac{|-\alpha\beta|}{\sqrt{4\beta^2+\alpha^2}} \overset{\alpha,\beta>0}{=} \frac{\alpha\beta}{\sqrt{4\beta^2+\alpha^2}}$$ οπότε πράγματι $d_1=d_2$.

δ) Η πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που αποδείχθηκε είναι η εξής: Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο, το μέσο της βάσης ισαπέχει από τις ίσες πλευρές.