ΛΥΣΗ

α) Ο κύκλος C_1 έχει κέντρο $\mathrm{A}(0,7)$ και ακτίνα $\rho=2$, άρα αντικαθιστώντας στον τύπο $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$, τις αντίστοιχες τιμές έχουμε:

$(x-0)^2+(y-7)^2=2^2 \Leftrightarrow x^2+(y-7)^2=4$ που είναι η ζητούμενη εξίσωση του κύκλου C_1.

β)

i. Σύμφωνα με το τύπο $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$, οι κύκλοι με κέντρο $\mathrm{B}(x_1,y_1)$ και ακτίνα 2 έχουν εξίσωση $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=4$.

ii. Η απόσταση δύο σημείων $\mathrm{A}(x_A,y_A)$ και $\mathrm{B}(x_\mathrm{B},y_\mathrm{B})$ δίνεται από τον τύπο $(\mathrm{AB})=\sqrt{(x_A-x_\mathrm{B})^2+(y_A-y_\mathrm{B})^2}$, οπότε για τα σημεία $\mathrm{A}(0,7)$ και $\mathrm{B}(x_1,y_1)$ έχουμε $(\mathrm{AB})=\sqrt{(0-x_1)^2+(7-y_1)^2} \Leftrightarrow (\mathrm{AB})=\sqrt{x_1^2+(7-y_1)^2}$.

γ) Δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά αν και μόνο αν η διάκεντρος είναι ίση με το άθροισμα των ακτίνων τους. Οπότε έχουμε:

$(\mathrm{AB})=2+2 \Leftrightarrow \sqrt{(x_1-0)^2+(y_1-7)^2}=4 \Leftrightarrow x_1^2+(y_1-7)^2=16$ (1).

Ένας κύκλος εφάπτεται σε ευθεία αν και μόνο αν το κέντρο του κύκλου απέχει από την ευθεία απόσταση ίση με την ακτίνα του. Οπότε έχουμε:

$d(\mathrm{B},\varepsilon)=2 \Leftrightarrow \dfrac{|0+x_1-5|}{\sqrt{0^2+1^2}}=2 \Leftrightarrow |x_1-5|=2$ (2).

Για να βρούμε τους κύκλους που εφάπτονται στον κύκλο C_1 και στην ευθεία (ε) επιλύουμε το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2):

$$\begin{cases} x_1^2+(y_1-7)^2=16 \\ |x_1-5|=2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x_1^2+\left(y_1-7\right)^2=16 \\ x_1-5=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7^2+\left(y_1-7\right)^2=16 \\ x_1=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(y_1-7\right)^2=-33 \\ x_1=7 \end{cases} \text{ Αδύνατο.} \\ \text{ή} \\ \begin{cases} x_1^2+\left(y_1-7\right)^2=16 \\ x_1-5=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^2+\left(y_1-7\right)^2=16 \\ x_1=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(y_1-7\right)^2=7 \\ x_1=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1=7-\sqrt{7} \text{ ή } y_2=7+\sqrt{7} \\ x_1=3 \end{cases} \end{cases}$$

Τελικά είναι δύο οι δύο κύκλοι που εφάπτονται εξωτερικά στον κύκλο C_1 και στην ευθεία (ε) έχουν κέντρα τα σημεία $\mathrm{B}\left(3,7-\sqrt{7}\right)$ και $\mathrm{B}'\left(3,7+\sqrt{7}\right)$ και ακτίνα $\rho=2$.