ΛΥΣΗ

α) Η ευθεία που διέρχεται από τα Α,Β θα έχει εξίσωση: $y=\lambda x+b$ αφού $x_A \neq x_B$.

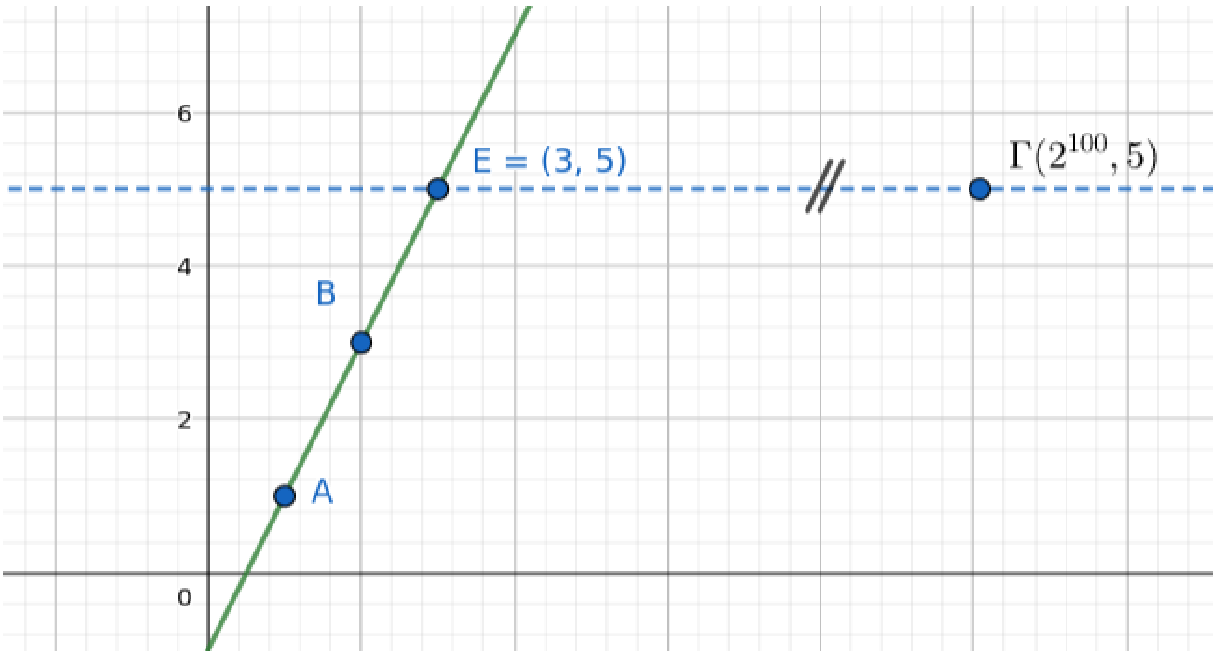
Οπότε $\lambda_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{3-1}{2-1}=\frac{2}{1}=2$.

Άρα η ευθεία θα είναι της μορφής $y=2x+b$. Αντικαθιστώντας τις συντεταγμένες του σημείου Α θα έχουμε: $1=2\cdot 1+b \Leftrightarrow b=-1$. Επομένως, η εξίσωση της ευθείας θα είναι η $(\varepsilon): y=2x-1$.

β)

α΄τρόπος

Το σημείο $E(3,5)$ ανήκει στην (ε), διότι $2\cdot 3-1=5$. Το σημείο Γ βρίσκεται στην ίδια ευθεία παράλληλη στον άξονα x'x την y=5 με το Ε και «δεξιά» από αυτήν, ενώ το σημείο Ο(0,0) βρίσκεται στο άλλο ημιεπίπεδο, «αριστερά» από αυτήν, όπως βλέπουμε και στο επόμενο σχήμα.



β΄ τρόπος

Για $y=0$ το σημείο $\Delta\left(\frac{1}{2},0\right)$ ανήκει στην ευθεία (ε) και το διάνυσμα $\overrightarrow{\Delta O}=\left(\frac{-1}{2},0\right)$ είναι παράλληλο στον άξονα $x'x$.

Επίσης το σημείο $E(3,5)$ ανήκει στην (ε), διότι $2\cdot 3-1=5$ και το διάνυσμα $\overrightarrow{E\Gamma}=(2^{100}-3,5-5)=(2^{100}-3,0)$ είναι παράλληλο στον άξονα $x'x$. Τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta O},\overrightarrow{E\Gamma}$ έχουν αρχή στην ευθεία (ε) και είναι αντίρροπα, οπότε ανήκουν σε διαφορετικά ημιεπίπεδα της (ε). Συνεπώς και τα σημεία Ο , Γ δεν ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο από αυτά που ορίζει η (ε).

γ) Τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΑΒΓ έχουν την ίδια βάση ΑΒ, με φορέα την ευθεία (ε).

Η απόσταση του Ο και του Γ αντίστοιχα από την (ε) είναι:

$$d(O,\varepsilon)=\frac{|2\cdot 0-0-1|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$d(\Gamma,\varepsilon)=\frac{|2\cdot 2^{100}-5-1|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{2^{101}-6}{\sqrt{5}}>\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Συνεπώς $d(O,\varepsilon)<d(\Gamma,\varepsilon)$ άρα το τρίγωνο ΑΒΓ έχει μεγαλύτερο εμβαδόν από το ΑΟΒ.