ΛΥΣΗ

α) Οι συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MB}$ και $\overrightarrow{AB}$ είναι αντίστοιχα

$$\overrightarrow{AM} = (x_M - x_A \, , y_M - y_A) = (x + 3 \, , y + 1) \, ,$$

$$\overrightarrow{MB} = (x_B - x_M \, , y_B - y_M) = (-x \, , 3 - y) \, ,$$

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A \, , y_B - y_A) = (3 \, , 4) \; .$$

β) Τα μέτρα των διανυσμάτων $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MB}$ και $\overrightarrow{AB}$ είναι αντίστοιχα

$$\left|\overrightarrow{AM}\right| = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + (y+1)^2} \, ,$$

$$\left|\overrightarrow{MB}\right| = \sqrt{(x_B - x_M)^2 + (y_B - y_M)^2} = \sqrt{x^2 + (y-3)^2} \, ,$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

γ) Για το μέτρο του αθροίσματος δύο διανυσμάτων ισχύει

$\left|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}\right| \leq \left|\overrightarrow{AM}\right| + \left|\overrightarrow{MB}\right|$ ή $\left|\overrightarrow{AB}\right| \leq \left|\overrightarrow{AM}\right| + \left|\overrightarrow{MB}\right|$ ή $5 \leq \left|\overrightarrow{AM}\right| + \left|\overrightarrow{MB}\right|$, άρα

$$\left|\overrightarrow{AM}\right| + \left|\overrightarrow{MB}\right| \geq 5.$$

δ) Από το γ) ερώτημα για οποιοδήποτε σημείο $M(x, y)$ του καρτεσιανού επιπέδου ισχύει

$\left|\overrightarrow{AM}\right| + \left|\overrightarrow{MB}\right| \geq 5$, οπότε αντικαθιστώντας από το β) ερώτημα θα έχουμε

$$\sqrt{(x+3)^2 + (y+1)^2} + \sqrt{x^2 + (y-3)^2} \geq 5 \, .$$

Οπότε δεν υπάρχει ζεύγος (x, y) πραγματικών αριθμών ώστε να ισχύει

$$\sqrt{(x+3)^2 + (y+1)^2} + \sqrt{x^2 + (y-3)^2} = 4.$$

Επομένως ο ισχυρισμός είναι ψευδής.