ΛΥΣΗ

α) Είναι $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} =$

$$= (\lambda+1)\vec{\imath} + (\lambda+3)\vec{\jmath} - 2\vec{\imath} - \lambda\vec{\jmath} = (\lambda+1-2)\vec{\imath} + (\lambda+3-\lambda)\vec{\jmath} = (\lambda-1)\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}.$$

β) Η απόσταση των σημείων A και B είναι ίση με

$$(AB) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(\lambda-1)^2+3^2} = \sqrt{(\lambda-1)^2+9}\,,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

γ) Είναι $(AB) = 5 \Leftrightarrow \sqrt{(\lambda-1)^2+9} = 5 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2+9 = 25 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2 = 16$

$$\Leftrightarrow (\lambda-1)^2 = 4^2 \Leftrightarrow (\lambda-1 = 4 \text{ ή } \lambda-1 = -4\,) \Leftrightarrow \lambda = 5 \text{ ή } \lambda = -3.$$

δ) Για κάθε πραγματικό αριθμό λ έχουμε

$(\lambda-1)^2 \geq 0 \ \Leftrightarrow (\lambda-1)^2+9 \geq 9 \Leftrightarrow \sqrt{(\lambda-1)^2+9} \geq \sqrt{9} \Leftrightarrow (AB) \geq 3,$

όπου η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $(\lambda-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda-1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1.$

Άρα, για κάθε πραγματικό αριθμό $\lambda \neq 1$ η απόσταση των σημείων A και B είναι $(AB) > 3$.

Όταν $\lambda = 1$ η απόσταση των σημείων A και B είναι $(AB) = 3$ και αυτή είναι η μικρότερη δυνατή τιμή της.

(Άλλος τρόπος: Η απόσταση των σημείων A και B γράφεται:

$$(AB) = \sqrt{(\lambda-1)^2+9} = \sqrt{\lambda^2-2\lambda+10}\,,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

και παίρνει τη μικρότερη δυνατή τιμή, όταν το τριώνυμο $\lambda^2-2\lambda+10$, παρουσιάζει ελάχιστο. Αυτό συμβαίνει όταν $\lambda = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$. Είναι $\alpha = 1$, $\beta = -2$ και $\gamma = 10$, οπότε το τριώνυμο $\lambda^2-2\lambda+10$, παρουσιάζει ελάχιστο για $\lambda = -\frac{-2}{2\cdot 1} = 1$.)

Επομένως ο ισχυρισμός είναι αληθής.