ΛΥΣΗ

α) Η παραβολή C έχει εξίσωση της μορφής $y^2=2px$ όπου $2p=4 \Leftrightarrow p=2$, οπότε η εστία της έχει συντεταγμένες $\left(\frac{p}{2},0\right)$ δηλαδή $\mathrm{E}(1,0)$ και διευθετούσα με εξίσωση $x=-\frac{p}{2}$ δηλαδή $\delta: x=-1$.

β) Η (1) είναι της μορφής $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0$ όπου $\mathrm{A}=\lambda^2-1, \mathrm{B}=2\lambda, \Gamma=\lambda^2+1$.

Είναι $\mathrm{A}=0 \Leftrightarrow \lambda^2-1=0 \Leftrightarrow \lambda^2=1 \Leftrightarrow \lambda=\pm 1$ και $\mathrm{B}=2\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=0$. Επειδή δεν υπάρχει τιμή του λ για την οποία να μηδενίζονται ταυτόχρονα τα A και B, η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Επίσης $\Gamma=\lambda^2+1>0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ οπότε δεν διέρχεται από το $\mathrm{O}(0,0)$.

γ) Για $\lambda \neq 0$ η (1) παριστάνει ευθεία που δεν είναι παράλληλη στον yy' και επομένως δεν μπορεί να είναι η διευθετούσα δ.

Για $\lambda=0$ η (1) γίνεται $x=1$ που δεν είναι η διευθετούσα δ.

Συνεπώς η διευθετούσα της παραβολής δεν ανήκει στην οικογένεια ευθειών ε_λ.

δ) Έστω $\mathrm{M}(\alpha,\beta)$ σημείο του επιπέδου το οποίο δεν ανήκει στη δ, δηλαδή $\alpha \neq -1$ και διέρχεται από αυτό μόνο μία ευθεία από την οικογένεια ευθειών ε_λ, δηλαδή οι συντεταγμένες του Μ επαληθεύουν την (1) για μία και μόνο τιμή του λ, συνεπώς ισχύει $\lambda^2\alpha-\alpha+2\lambda\beta+\lambda^2+1=0 \Leftrightarrow (\alpha+1)\lambda^2+2\lambda\beta+1-\alpha=0$ για μία και μόνο τιμή του λ. Η εξίσωση $(\alpha+1)\lambda^2+2\lambda\beta+1-\alpha=0$ είναι 2ου βαθμού ως προς λ, αφού $\alpha \neq -1$ και για να επαληθεύεται για μία μόνο τιμή του λ, πρέπει και αρκεί $\Delta=0$.

Είναι $\Delta=0 \Leftrightarrow (2\beta)^2-4(\alpha+1)(1-\alpha)=0 \Leftrightarrow 4\beta^2-4+4\alpha^2=0 \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2=1$

που σημαίνει ότι το σημείο $\mathrm{M}(\alpha,\beta)$ ανήκει στο μοναδιαίο κύκλο, χωρίς το σημείο $(-1,0)$, αφού $\alpha \neq -1$. Ο κύκλος αυτός έχει κέντρο το Ο(0,0) δηλαδή την κορυφή της παραβολής C και ακτίνα $\rho=1$, οπότε διέρχεται από την εστία E, αφού $(\mathrm{OE})=1=\rho$.