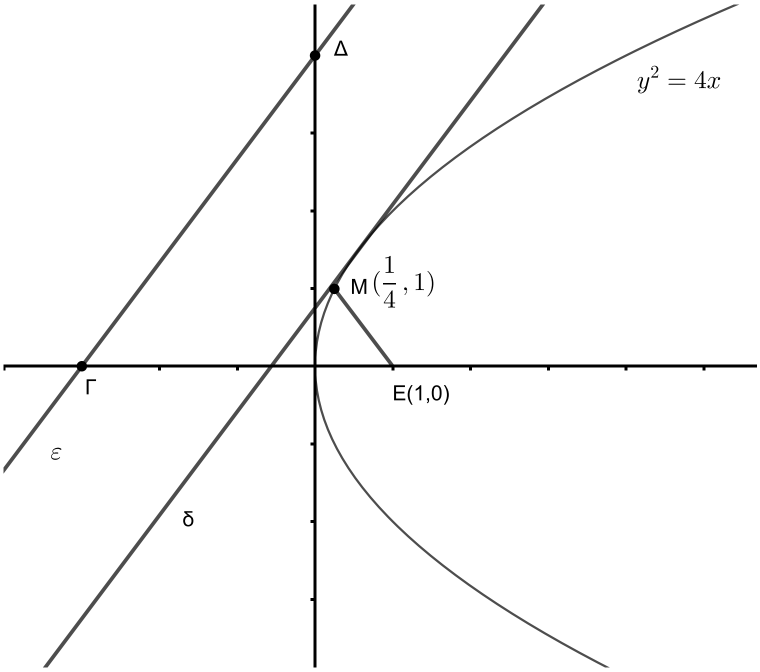
ΛΥΣΗ



α)

i. Αρκεί να δείξουμε ότι το σύστημα των εξισώσεων της παραβολής $y^2 = 4x$ και της ευθείας $\frac{x}{3} - \frac{y}{4} + 1 = 0$ είναι αδύνατο.

$$\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{4} + 1 = 0 \\ y^2 = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 3y + 12 = 0 \\ y^2 = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 3y + 12 = 0 \\ y^2 = 4x \end{cases}$$

. Η δευτέρου βαθμού εξίσωση $y^2 - 3y + 12 = 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες, αφού Δ = 9-48<0, άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

Η ευθεία ε ισοδύναμα γράφεται 4x-3y+12=0

$$d(M, ε) = \frac{|4\cdot\frac{1}{4} - 3\cdot 1 + 12|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{10}{5} = 2.$$

ii. Τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες τα βρίσκουμε θέτοντας y=0 και x=0 στην εξίσωσή της.

Για y=0 έχουμε $\frac{x}{3}$ = -1 ή x = -3, άρα Γ(-3, 0).

Για x=0 έχουμε $\frac{y}{4}$ = 1 ή y = 4, άρα Δ(0, 4).

Για το εμβαδό του τριγώνου ΜΓΔ θα βρούμε το μήκος του τμήματος ΓΔ γιατί το ύψος που αντιστοιχεί σε αυτό είναι η απόσταση του σημείου Μ από την ευθεία ε.

$$(ΓΔ) = \sqrt{(-3-0)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 .$$

Άρα (ΜΓΔ) = $\frac{1}{2}$ (ΓΔ)$\cdot$ d(Μ, ε) = $\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 2$ = 5 τ.μ.

β)

i. Η εφαπτομένη ζ της παραβολής σε τυχαίο σημείο της (x_1,y_1) με $y_1\neq 0$ έχει εξίσωση $yy_1 = 2(x+x_1)$ ή $y = \frac{2}{y_1}\cdot x + \frac{2x_1}{y_1}$ με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\zeta = \frac{2}{y_1}$.

Η ευθεία ε έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon = \frac{4-0}{0-(-3)} = \frac{4}{3}$. Για να είναι η ευθεία ε παράλληλη της εφαπτομένης ζ πρέπει και αρκεί $\lambda_\zeta = \lambda_\varepsilon$ ή $\frac{4}{3} = \frac{2}{y_1}$ ή $y_1 = \frac{3}{2}$.

Το σημείο (x_1,y_1) επαληθεύει την εξίσωση της παραβολής, επομένως

$$y_1^2 = 4x_1 \text{ ή } \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 4x_1 \text{ ή } x_1 = \frac{9}{16}.$$

Για $x_1 = \frac{9}{16}$, $y_1 = \frac{3}{2}$ η εφαπτομένη ζ που είναι παράλληλη της ευθείας ε είναι:

$$y = \frac{2}{y_1}\cdot x + \frac{2x_1}{y_1} \quad \text{ή} \quad y = \frac{2}{\frac{3}{2}}\, x + \frac{2\cdot\frac{9}{16}}{\frac{3}{2}} \quad \text{ή τελικά}$$

$$\zeta:\ 16x-12y+9=0$$

ii. Για να βρούμε την απόσταση των ευθειών ζ και ε, αρκεί να βρούμε ένα σημείο, έστω Κ, της ζ και να υπολογίσουμε την απόσταση του σημείου αυτού από την ευθεία ε.

Θέτοντας $x=0$ στην εξίσωση της ευθείας ζ έχουμε: $y = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$. Άρα το σημείο Κ της ευθείας ζ είναι το $K(0, \frac{3}{4})$. Η εξίσωση της ευθείας ε είναι: $4x-3y+12=0$, επομένως:

$$d(\zeta, \varepsilon) = d(K, \varepsilon) = \frac{|4\cdot 0-3\cdot\frac{3}{4}+12|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \frac{|-\frac{9}{4}+\frac{48}{4}|}{\sqrt{25}} = \frac{\frac{39}{4}}{5} = \frac{39}{20}.$$