ΛΥΣΗ

α) Έστω ότι $\mathrm{E}(\gamma,0),\mathrm{E}'(-\gamma,0)$ και $\mathrm{B}(0,\beta),\mathrm{B}'(0,-\beta)$, όπου $\beta>0,\gamma>0$.

Αφού το τετράπλευρο $\mathrm{BEB}'\mathrm{E}'$ είναι τετράγωνο, θα έχει ίσες διαγώνιους, δηλαδή $\mathrm{OB}=\mathrm{OE}$ και άρα $\beta=\gamma$. Γνωρίζουμε επίσης ότι $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$, οπότε αφού $\alpha=5$ και $\beta=\gamma$ έχουμε ότι $5^2=\beta^2+\beta^2 \Leftrightarrow 25=2\beta^2 \Leftrightarrow \beta^2=\frac{25}{2} \overset{\beta>0}{\Leftrightarrow} \beta=\frac{5}{\sqrt{2}}$.

Συνεπώς $\mathrm{E}(\frac{5}{\sqrt{2}},0),\mathrm{E}'(-\frac{5}{\sqrt{2}},0),\mathrm{B}(0,\frac{5}{\sqrt{2}}),\mathrm{B}'(0,-\frac{5}{\sqrt{2}})$.

β) Η έλλειψη έχει κέντρο το $\mathrm{O}(0,0)$ και εστίες στον άξονα xx' οπότε θα έχει εξίσωση της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$. Έχουμε όμως ότι $\alpha=5$ και $\beta=\frac{5}{\sqrt{2}}$, οπότε η ζητούμενη εξίσωση είναι η $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{\frac{25}{2}}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{2y^2}{25}=1$.

γ) Από τον ορισμό της έλλειψης γνωρίζουμε ότι για κάθε σημείο M της C είναι $(\mathrm{ME})+(\mathrm{ME}')=2\alpha=10$.

i. Η περίμετρος του τριγώνου EME' για κάθε σημείο M της C που δεν ταυτίζεται με κάποιο από τα A,A' είναι ίση με

$(\mathrm{ME})+(\mathrm{ME}')+(\mathrm{EE}')=10+\frac{10}{\sqrt{2}}$.

ii. Το τρίγωνο EME' για κάθε σημείο M της C που δεν ταυτίζεται με κάποιο από τα A,A' έχει σταθερή βάση την $(\mathrm{EE}')=\frac{10}{\sqrt{2}}$ και παίρνει τη μέγιστη τιμή του, όταν το ύψος από την κορυφή M πάρει τη μέγιστη τιμή του. Αυτό συμβαίνει μόνο όταν το σημείο M ταυτιστεί με ένα εκ των $\mathrm{B}(0,\frac{5}{\sqrt{2}}),\mathrm{B}'(0,-\frac{5}{\sqrt{2}})$, όπου η μέγιστη τιμή του ύψους είναι $\frac{5}{\sqrt{2}}$ και η μέγιστη τιμή του εμβαδού του τριγώνου EME' είναι αντίστοιχα $\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{\sqrt{2}}\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{25}{2}$.