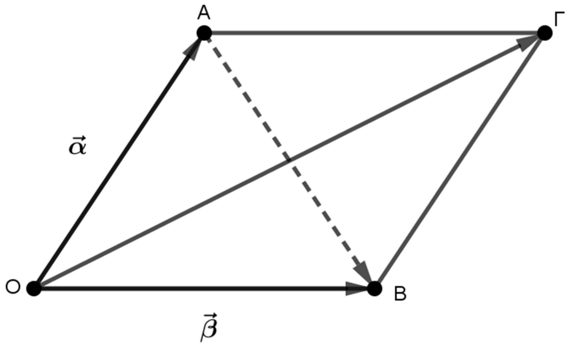
ΛΥΣΗ

α) Το παραλληλόγραμμο $\mathrm{OA\Gamma B}$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Οπότε από τον λεγόμενο «κανόνα του παραλληλογράμμου» προκύπτει: $\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$. Επίσης $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{\beta} - \vec{\alpha}$.

i. Έχουμε:

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}\right|^2 = \left(\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}\right)^2 = \left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right)^2 = \vec{\alpha}^2 + 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = \left|\vec{\alpha}\right|^2 + 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \left|\vec{\beta}\right|^2.$$

ii. Έχουμε:

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 = \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)^2 = \left(\vec{\beta} - \vec{\alpha}\right)^2 = \vec{\beta}^2 - 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\alpha}^2 = \left|\vec{\beta}\right|^2 - 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \left|\vec{\alpha}\right|^2 = \left|\vec{\alpha}\right|^2 - 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \left|\vec{\beta}\right|^2.$$

β) Έχουμε ισοδύναμα:

$$\begin{aligned}
&\left|\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| \Leftrightarrow \\
&\left|\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}\right|^2 = \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 \Leftrightarrow \\
&\left|\vec{\alpha}\right|^2 + 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \left|\vec{\beta}\right|^2 = \left|\vec{\alpha}\right|^2 - 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \left|\vec{\beta}\right|^2 \Leftrightarrow \\
&4\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow \\
&\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0 \overset{\vec{\alpha},\vec{\beta}\neq\vec{0}}{\Leftrightarrow} \\
&\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}.
\end{aligned}$$

Άρα το παραλληλόγραμμο $\mathrm{OA\Gamma B}$ είναι ορθογώνιο γιατί η γωνία $\widehat{\mathrm{O}}$ είναι ορθή.

Εναλλακτικά, με δεδομένο ότι $\left|\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|$, το παραλληλόγραμμο $\mathrm{OA\Gamma B}$ είναι ορθογώνιο γιατί οι διαγώνιοί του είναι ίσες.