ΛΥΣΗ

α) Από το θεώρημα ακέραιων ριζών πιθανές ακέραιες ρίζες είναι οι αριθμοί $\pm1,\pm2$. Με δοκιμή βρίσκουμε $P(1)=0$, άρα το $1$ είναι ρίζα του πολυωνύμου. Με το σχήμα Horner θα παραγοντοποιήσουμε το πολυώνυμο ώστε να βρούμε τις υπόλοιπες ρίζες.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 4 | −5 | −2 | 1 |
| | 3 | 7 | 2 | |
| 3 | 7 | 2 | 0 | |

Οπότε:

$$P(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(3x^2+7x+2\right)=0 \Leftrightarrow x-1=0 \text{ ή } 3x^2+7x+2=0 \Leftrightarrow x=1,\ x=-2,\ x=-\frac{1}{3}.$$

β) Συμπληρώνουμε το σχετικό πίνακα προσήμου.

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-\frac{1}{3}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $3x^2+7x+2$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| $P(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

Επομένως $P(x)>0 \Leftrightarrow x\in\left(-2,-\frac{1}{3}\right)\cup(1,+\infty)$.

γ) Η δοθείσα ανίσωση είναι ισοδύναμη με $P\left(\frac{5}{x^2+1}\right)>0$, $x\in\mathbb{R}$. Επομένως από το β) ερώτημα πρέπει $-2<\frac{5}{x^2+1}<-\frac{1}{3}$ (1)

ή $1<\frac{5}{x^2+1}$. (2)

Επιλύουμε τις δύο ανισώσεις:

Η (1) είναι αδύνατη, αφού $\frac{5}{x^2+1}>0$.

Η (2) γίνεται: $1<\frac{5}{x^2+1} \Leftrightarrow x^2+1<5 \Leftrightarrow x^2<4 \Leftrightarrow |x|<2 \Leftrightarrow -2<x<2$.