ΛΥΣΗ

α) Αφού η παραβολή διέρχεται από το σημείο $\Gamma(0,-2)$, ισχύει ότι

$$f(0) = -2 \Leftrightarrow \alpha \cdot 0^2 + \beta \cdot 0 + \gamma = -2 \Leftrightarrow \gamma = -2.$$

Άρα, $f(x) = \alpha x^2 + \beta x - 2$. Επίσης, τα σημεία $A(2,0)$ και $B(-2,0)$, είναι σημεία της παραβολής, οπότε:

$$\begin{cases} f(2) = 0 \\ f(-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \cdot 2^2 + \beta \cdot 2 - 2 = 0 \\ \alpha \cdot (-2)^2 + \beta \cdot (-2) - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 4\alpha + 2\beta - 2 = 0 \\ 4\alpha - 2\beta - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -2\alpha + 1 \\ 2\alpha - (-2\alpha + 1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \beta = -2\alpha + 1 \\ 4\alpha - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -2 \cdot \dfrac{1}{2} + 1 \\ \alpha = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Άρα, $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$

β) Για να βρούμε τις τετμημένες των κοινών σημείων της παραβολής και της ευθείας, λύνουμε την εξίσωση:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - 2 = -x + 2 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0.$$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta = 2^2 - 4(-8) = 36$ και ρίζες:

$$x_1 = \frac{-2+6}{2} = 2 \text{ και } x_2 = \frac{-2-6}{2} = -4.$$

Είναι $g(2) = 0$ και $g(-4) = 6$. Άρα, τα σημεία είναι τα $A(2,0)$ και $\Delta(-4,6)$.

γ) Με μετατόπιση της παραβολής κατά 4,5 μονάδες προς τα πάνω προκύπτει η συνάρτηση

$$h(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2 + 4{,}5 \Leftrightarrow h(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2{,}5.$$

Για να βρούμε τις τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h$ με την ευθεία $g$ λύνουμε την εξίσωση:

$$h(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 + 2{,}5 = -x + 2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

Επίσης, $g(-1) = 3$. Άρα, η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h$ και η ευθεία $g$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο το $(-1,3)$.