Λύση

α)

i. Ισχύει ότι $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\alpha x\right)=\eta\mu\alpha x$ και $\sigma\upsilon\nu(\pi-\alpha x)=-\sigma\upsilon\nu\alpha x.$ Άρα, ο τύπος της συνάρτησης γίνεται:

$$f(x)=\eta\mu\alpha x(\eta\mu\alpha x+2)-\sigma\upsilon\nu\alpha x(-\sigma\upsilon\nu\alpha x)-1=$$
$$\eta\mu^2\alpha x+2\eta\mu\alpha x+\sigma\upsilon\nu^2\alpha x-1=$$
$$1+2\eta\mu\alpha x-1=2\eta\mu\alpha x.$$

ii. Η $\eta\mu\alpha x$ έχει περίοδο $T=\frac{2\pi}{\alpha}$. Από τη γραφική παράσταση προκύπτει ότι η συνάρτηση f έχει περίοδο $T=\pi$. Άρα,

$$\frac{2\pi}{\alpha}=\pi \Leftrightarrow \alpha=2.$$

β) Οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y=1$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$2\eta\mu 2x=1 \Leftrightarrow \eta\mu 2x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$
$$\eta\mu 2x=\eta\mu\frac{\pi}{6}.$$

Οπότε,

$$\begin{cases} 2x=\frac{\pi}{6}+2\kappa\pi \\ \text{ή} \\ 2x=\pi-\frac{\pi}{6}+2\kappa\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{12}+\kappa\pi \\ \text{ή} \\ x=\frac{5\pi}{12}+\kappa\pi \end{cases},\qquad \kappa\in\mathbb{Z}.$$

Επειδή $x\in[0,\pi]$ έχουμε ότι:

$$0\le x\le\pi \Leftrightarrow 0\le\frac{\pi}{12}+\kappa\pi\le\pi \Leftrightarrow$$
$$-\frac{1}{12}\le\kappa\le 1-\frac{1}{12} \Leftrightarrow -\frac{1}{12}\le\kappa\le\frac{11}{12} \overset{\kappa\in\mathbb{Z}}{\Longrightarrow} k=0$$

και

$$0\le x\le\pi \Leftrightarrow 0\le\frac{5\pi}{12}+\kappa\pi\le\pi \Leftrightarrow$$
$$-\frac{5}{12}\le\kappa\le 1-\frac{5}{12} \Leftrightarrow -\frac{5}{12}\le\kappa\le\frac{7}{12} \overset{\kappa\in\mathbb{Z}}{\Longrightarrow} k=0.$$

Άρα, $x=\frac{\pi}{12}$ και ή $x=\frac{5\pi}{12}$