ΛΥΣΗ

α) Για την συνάρτηση $f(x)=\alpha\cdot\eta\mu\beta x$ με α θετικό ακέραιο μέγιστη τιμή είναι το α, άρα $\alpha=2$.

Εναλλακτικά έχουμε ότι η μέγιστη τιμή του $\eta\mu\beta x$ είναι 1, άρα αν $\alpha\cdot\eta\mu\beta x=2$, πρέπει $\alpha=2$

β) Η συνάρτηση από το α) ερώτημα είναι $f(x)=2\cdot\eta\mu\beta x$, άρα

$$f\left(\frac{\pi}{16}\right)=2\Leftrightarrow 2\eta\mu\frac{\beta\pi}{16}=2\Leftrightarrow \eta\mu\frac{\beta\pi}{16}=1.$$

Λύνουμε την εξίσωση

$\eta\mu\frac{\beta\pi}{16}=1\Leftrightarrow\eta\mu\frac{\beta\pi}{16}=\eta\mu\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\frac{\beta\pi}{16}=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$, με $\kappa\in\mathbb{Z}$ (η λύση $\frac{\beta\pi}{16}=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{2}$ ταυτίζεται με την προηγούμενη).

Απλοποιώντας το π έχουμε $\frac{\beta}{16}=2\kappa+\frac{1}{2}$, η μικρότερη θετική τιμή του β που ζητάμε θα είναι όταν ο κ, ως ακέραιος, γίνει ίσος με 0 (για αρνητικές τιμές του κ το β γίνεται αρνητικό). Οπότε $\frac{\beta}{16}=2\kappa+\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{\beta}{16}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\beta=8$.

γ) Η εξίσωση $f(x)=1$ από τα προηγούμενα ερωτήματα είναι:

$$2\cdot\eta\mu 8x=1\Leftrightarrow\eta\mu 8x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\eta\mu 8x=\eta\mu\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow\begin{cases}8x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}\\ 8x=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{6}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\kappa\pi}{4}+\frac{\pi}{48}\\ x=\frac{\kappa\pi}{4}+\frac{5\pi}{48}\end{cases}, \text{ με } \kappa\in\mathbb{Z}$$

Αφού πρέπει $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ λύνουμε τις παρακάτω δύο ανισώσεις:

i) $0\le\frac{\kappa\pi}{4}+\frac{\pi}{48}\le\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow 0\le\left(\frac{\kappa}{4}+\frac{1}{48}\right)\pi\le\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow 0\le\frac{\kappa}{4}+\frac{1}{48}\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow-\frac{1}{48}\le\frac{\kappa}{4}\le\frac{1}{2}-\frac{1}{48}\Leftrightarrow$
$-\frac{1}{48}\le\frac{\kappa}{4}\le\frac{23}{48}\Leftrightarrow-\frac{4}{48}\le\kappa\le\frac{4\cdot 23}{48}\Leftrightarrow-\frac{1}{12}\le\kappa\le\frac{23}{12}$.

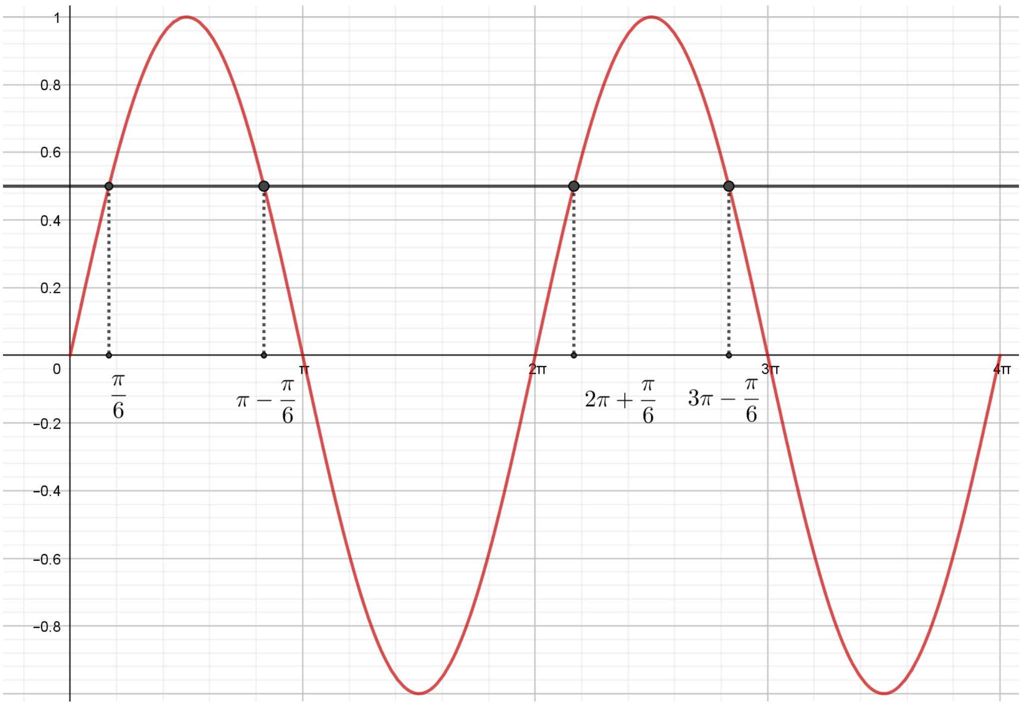
Αφού $\kappa\in\mathbb{Z}$, είναι $\kappa=0$ ή $\kappa=1$ δηλαδή δεκτές είναι οι γωνίες $x=\frac{\pi}{48}rad$ ή $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{48}=\frac{13\pi}{48}rad$.

ii) $0 \le \frac{\kappa\pi}{4}+\frac{5\pi}{48} \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \le \left(\frac{\kappa}{4}+\frac{5}{48}\right)\pi \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \le \frac{\kappa}{4}+\frac{5}{48} \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{5}{48} \le \frac{\kappa}{4} \le \frac{1}{2}-\frac{5}{48} \Leftrightarrow$

$-\frac{5}{48} \le \frac{\kappa}{4} \le \frac{19}{48} \Leftrightarrow -\frac{4\cdot 5}{48} \le \kappa \le \frac{4\cdot 19}{48} \Leftrightarrow -\frac{5}{12} \le \kappa \le \frac{19}{12}$.

Αφού $\kappa \in \mathbb{Z}$, είναι $\kappa = 0$ ή $\kappa = 1$ δηλαδή δεκτές είναι οι γωνίες $x = \frac{5\pi}{48} rad$ ή $x = \frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{48} = \frac{17\pi}{48} rad$.

Εναλλακτικά, όπως στην προηγούμενη λύση, έχουμε $\eta\mu 8x = \frac{1}{2}$. Επειδή $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, θα είναι $0 \le 8x \le 4\pi$. Οι αριθμοί των οποίων το ημίτονο είναι ίσο με $\frac{1}{2}$ στο διάστημα αυτό είναι οι: $\frac{\pi}{6}, \pi-\frac{\pi}{6}, 2\pi+\frac{\pi}{6}, 3\pi-\frac{\pi}{6}$, όπως προκύπτει από την παρακάτω γραφική παράσταση της συνάρτησης $\eta\mu\omega$.



Άρα:

$$8x = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{48}$$

$$8x = \pi - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{48}$$

$$8x = 2\pi + \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{13\pi}{48}$$

$$8x = 3\pi - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{17\pi}{48}.$$