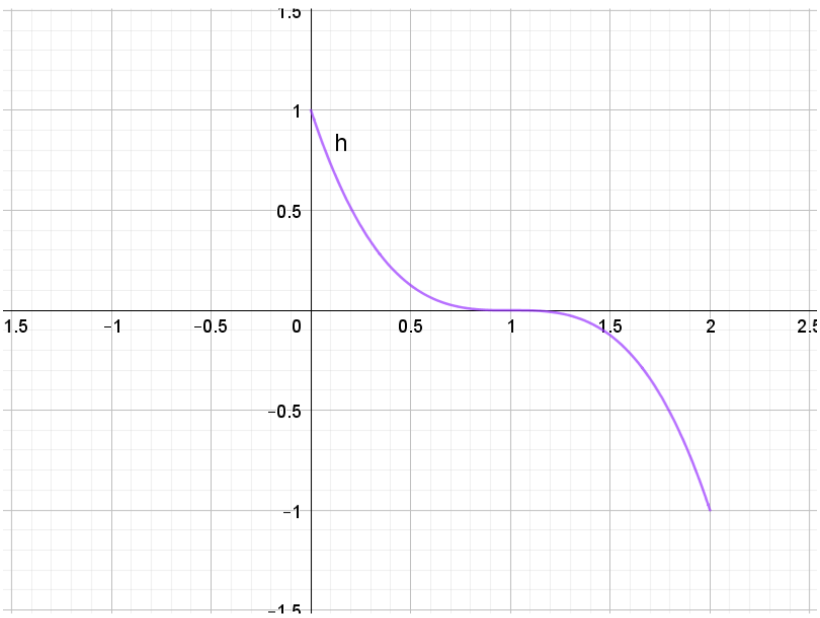
ΛΥΣΗ

α) Στο σχήμα α η γραφική παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον yy' οπότε είναι άρτια και όχι περιττή, οπότε δεν είναι. Στο σχήμα γ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα οπότε δεν είναι. Στο σχήμα δ η συνάρτηση είναι μεν περιττή και γνησίως φθίνουσα, αλλά έχει πεδίο ορισμού το $\left[-2,2\right]$ και όχι το $\left[-1,1\right]$, οπότε δεν είναι.

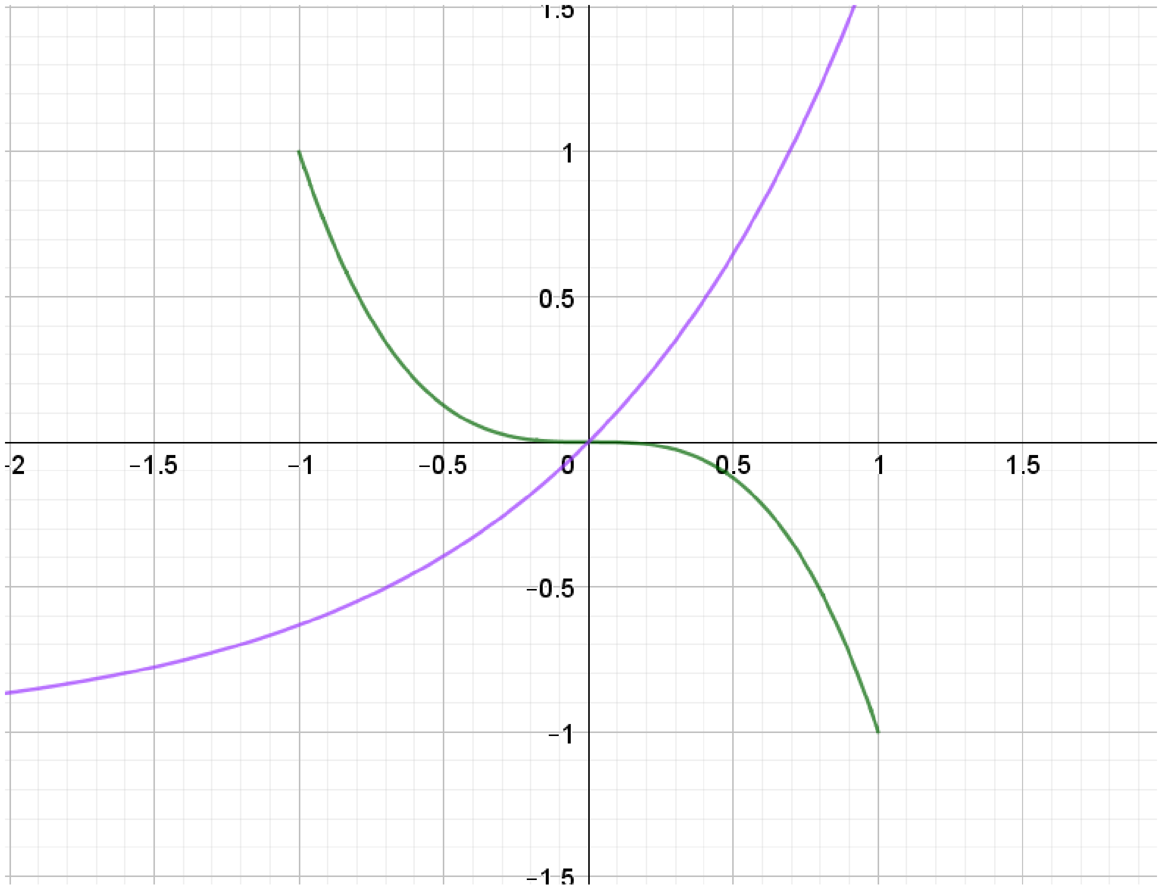
Συνεπώς σωστή απάντηση είναι το σχήμα β.

β) Η γραφική παράσταση της $g(x)=f(x)+2$ προκύπτει με κατακόρυφη μετατόπιση της $f(x)$ κατά 2 μονάδες προς τα πάνω. Η γραφική της παράσταση φαίνεται παρακάτω.

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x)=f(x-1)$ προκύπτει με οριζόντια μετατόπιση της $f(x)$ κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά. Η γραφική της παράσταση φαίνεται παρακάτω.



δ) Η γραφική παράσταση της $s(x)=e^x-1$ προκύπτει με κατακόρυφη μετατόπιση της e^x κατά 1 μονάδα προς τα κάτω. Η γραφική της παράσταση φαίνεται παρακάτω.



Από το παραπάνω σχήμα βλέπουμε ότι η γραφική παράσταση της $s(x)=e^x-1$ έχει ένα ακριβώς κοινό σημείο, το $(0,0)$ με τη γραφική παράσταση της f, που σημαίνει ότι η εξίσωση $s(x)=f(x)$ έχει ακριβώς μία λύση τη $x=0$.

Εναλλακτικά, για $x=0$ είναι $s(0)=e^0-1=1-1=0=f(0)$.

Για $x>0$ είναι $e^x>e^0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow e^x-1>0$ ενώ $f(x)<f(0) \Leftrightarrow f(x)<0$ αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε για $x>0$ είναι $s(x)>f(x)$.

Για $x<0$ είναι $e^x<e^0 \Leftrightarrow e^x<1 \Leftrightarrow e^x-1<0$ ενώ $f(x)>f(0) \Leftrightarrow f(x)>0$ αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε για $x<0$ είναι $s(x)<f(x)$.

Συνεπώς η εξίσωση $s(x)=f(x)$ έχει ακριβώς μία λύση τη $x=0$.