ΛΥΣΗ

α) Για τη γωνία $\theta = \mathrm{A\hat{O}M}$ γνωρίζουμε ότι $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ και $\eta\mu\theta = \frac{4}{5}$. Από τη τριγωνομετρική ταυτότητα $\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1$ έχουμε ότι:

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 \Leftrightarrow \frac{16}{25} + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 - \frac{16}{25} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\theta = \frac{9}{25}.$$

Όμως $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ οπότε $\sigma\upsilon\nu\theta < 0$ και επομένως $\sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{3}{5}$.

Επίσης $\varepsilon\phi\theta = \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$ και τέλος $\sigma\phi\theta = \frac{1}{\varepsilon\phi\theta} = \frac{1}{-\frac{4}{3}} = -\frac{3}{4}$.

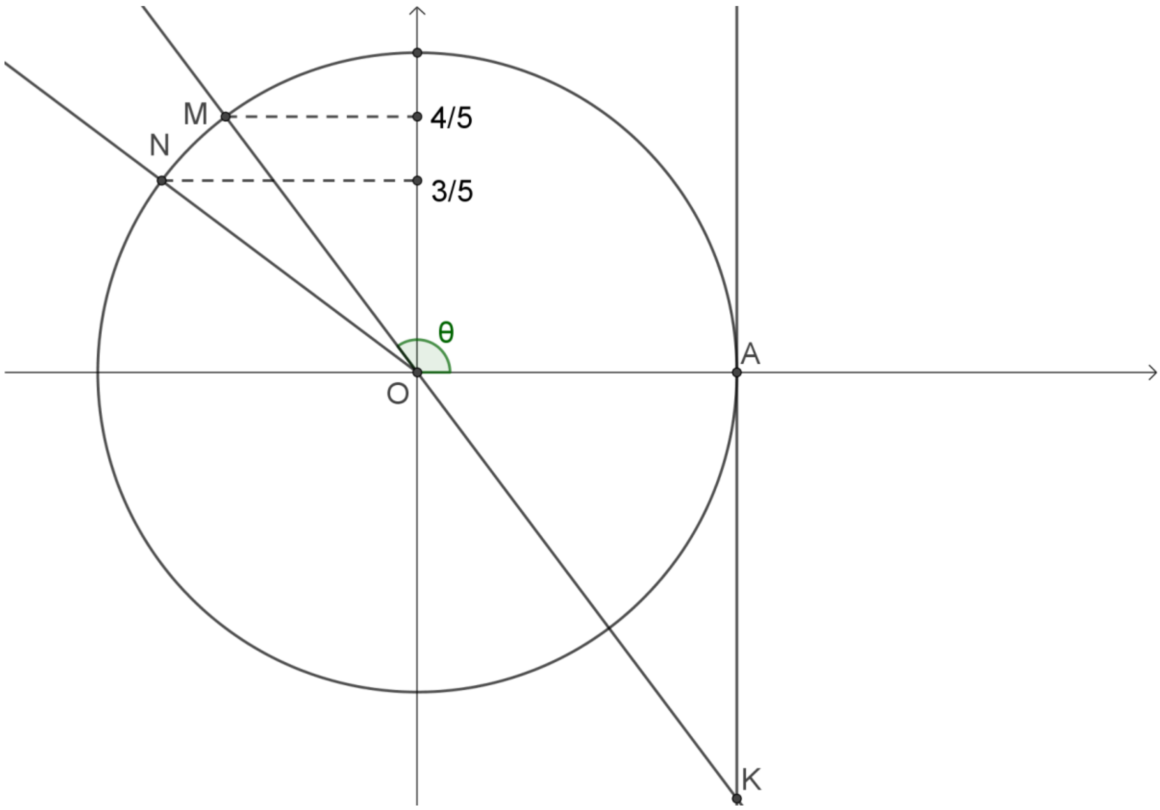
β) Γενικά, για τα σημεία M και K που η τελική πλευρά μιας γωνίας θ τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο και την ευθεία $x = 1$ αντίστοιχα, ισχύει ότι $\mathrm{M}(\sigma\upsilon\nu\theta, \eta\mu\theta)$ και $\mathrm{K}(1, \varepsilon\phi\theta)$. Συνεπώς $\mathrm{M}(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ και $\mathrm{K}(1, -\frac{4}{3})$.

γ)

i. Είναι $\eta\mu\phi = \frac{3}{5} > 0$ και $\sigma\upsilon\nu\phi < 0$, οπότε η τελική πλευρά της γωνίας φ είναι στο 2ο τεταρτημόριο.

ii. Είναι $\frac{3}{5} < \frac{4}{5}$, δηλαδή $\eta\mu\theta > \eta\mu\phi$. Όμως η συνάρτηση $\eta\mu x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, οπότε για να είναι $\eta\mu\theta > \eta\mu\phi$ θα πρέπει $\theta < \phi$.

Εναλλακτικά, βρίσκουμε το σημείο Ν του κύκλου με τεταγμένη $\eta\mu\phi = \frac{3}{5}$ και τετμημένη $\sigma\upsilon\nu\phi < 0$ και διαπιστώνουμε το σημείο Ν είναι πιο αριστερά και κάτω από το σημείο Μ δηλαδή $\mathrm{A\hat{O}M} < \mathrm{A\hat{O}N}$ οπότε $\theta < \phi$.


M
N
4/5
3/5
θ
A
O
K