ΛΥΣΗ

α) Η περίοδος της συνάρτησης f είναι $\mathrm{T}=\dfrac{2\pi}{\dfrac{\pi}{2}}=4$.

β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$-1\le \eta\mu\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)\le 1$ οπότε $-2\le 2\eta\mu\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)\le 2$ οπότε $-2+1\le 1+2\eta\mu\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)\le 2+1$ και τελικά $-1\le f(x)\le 3$.

Επίσης $f(1)=1+2\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=3$ και $f(3)=1+2\eta\mu\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=-1$.

Συνεπώς η μέγιστη τιμή της f είναι το 3 και η ελάχιστη το -1.

γ) Οι τετμημένες των σημείων στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα xx' είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=0$. Είναι

$$f(x)=0\Leftrightarrow 1+2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)=0\Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)=\eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{c}\dfrac{\pi x}{2}=2\kappa\pi+\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\\ \eta'\\ \dfrac{\pi x}{2}=2\kappa\pi+\pi-\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\dfrac{\pi x}{2}=2\kappa\pi-\dfrac{\pi}{6}\\ \eta'\\ \dfrac{\pi x}{2}=2\kappa\pi+\dfrac{7\pi}{6}\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\dfrac{x}{2}=2\kappa-\dfrac{1}{6}\\ \eta'\\ \dfrac{x}{2}=2\kappa+\dfrac{7}{6}\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}x=4\kappa-\dfrac{1}{3}\\ \eta'\\ x=4\kappa+\dfrac{7}{3}\end{array}\right\},\quad \kappa\in\mathbb{Z}$$

οπότε οι ζητούμενες τετμημένες είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί της μορφής $x=4\kappa-\dfrac{1}{3}$ ή $x=4\kappa+\dfrac{7}{3}$, όπου $\kappa\in\mathbb{Z}$.

δ) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$f(1-x)=1+2\eta\mu\left(\dfrac{\pi(1-x)}{2}\right)=1+2\eta\mu\left(\dfrac{\pi-\pi x}{2}\right)=1+2\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi x}{2}\right)=1+2\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$, οπότε

$$\left(f(x)-1\right)^2+\left(f(1-x)-1\right)^2=\left(1+2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)-1\right)^2+\left(1+2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x}{2}\right)-1\right)^2=$$

$$4\eta\mu^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)+4\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)=4(\eta\mu^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)+\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi x}{2}\right))=4\cdot 1=4$$

δηλαδή $\left(f(x)-1\right)^2+\left(f(1-x)-1\right)^2=4$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.