ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f ορίζεται μόνο για $x+3 \geq 0$ , δηλαδή για $x \geq -3$.

Άρα, το πεδίο ορισμού της f είναι: $A_f = [-3, +\infty)$.

Σύμφωνα με το σχήμα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-3, +\infty)$.

Η συνάρτηση g παριστάνει ευθεία για κάθε πραγματική τιμή του x και είναι γνησίως

αύξουσα στο $\mathbb{R}$, εφόσον είναι της μορφής $y = \alpha x + \beta$ με $\alpha > 0$.

β) Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \sqrt{x+3} = 3x - 1$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των $C_f$ και $C_g$ που ανήκουν στο σύνολο $A = A_f \cap A_g = [-3, +\infty)$.

Από το σχήμα παρατηρούμε πως οι γραφικές παραστάσεις τέμνονται στο σημείο (1,2), δηλαδή στο σημείο με τετμημένη x=1 και $1 \epsilon A$.

Άρα, η εξίσωση έχει μοναδική λύση x=1.

β) **Εναλλακτική λύση :**

Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = g(x)$ προκύπτουν από τις λύσεις της παρακάτω εξίσωσης

$$\sqrt{x+3} = 3x - 1.$$

Η εξίσωση ορίζεται για $x \geq -3$ και $3x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}$.

$\sqrt{x+3} = 3x - 1$ υψώνουμε και τα δυο μέλη στο τετράγωνο

$\sqrt{x+3}^2 = (3x-1)^2 \Leftrightarrow x + 3 = 9x^2 - 6x + 1 \Leftrightarrow 9x^2 - 7x - 2 = 0$.

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι 1 και $-\frac{2}{9}$. Από τις ρίζες αυτές διαπιστώνουμε με επαλήθευση ότι μόνο η x=1 είναι δεκτή.

Άρα, μοναδική λύση της εξίσωσης $f(x) = g(x)$ είναι η x=1.

γ) i. Η ανίσωση $f(x) < g(x)$ λύνεται γραφικά με το να βρούμε τις τετμημένες, δηλαδή τα x, όπου η $C_f$ είναι κάτω από $C_g$.

Από το σχήμα προκύπτει πως αυτό συμβαίνει για $x \epsilon (1, +\infty)$.

ii. Αλγεβρικά η ανίσωση λύνεται:

Για $3x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}$ και $x \geq -3$, έχουμε

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow \sqrt{x+3} < 3x - 1 \Leftrightarrow \sqrt{x+3}^2 < (3x-1)^2 \Leftrightarrow$$

$$x + 3 < 9x^2 - 6x + 1 \Leftrightarrow$$

$$9x^2 - 7x - 2 > 0 \text{ τότε}$$

$$x \epsilon (-\infty, -\frac{2}{9}) \cup (1, +\infty).$$

Σύμφωνα με τους περιορισμούς η ανίσωση αληθεύει για $x \epsilon (1, +\infty)$.

Για $3x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{3}$ και $x \geq -3$, έχουμε $\sqrt{x+3} < 3x - 1$ αδύνατη.