ΛΥΣΗ

α) Επειδή $ημ\left(\frac{π}{2}-x\right)=συνx$ και $ημ(π+x)=-ημx$, έχουμε: $f(x)=συνx-ημx,\ x\in\mathbb{R}$.

β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, έχουμε:

$$-1\le συνx\le 1,\ (1)\ \text{ και }\ -1\le ημx\le 1\Leftrightarrow -1\le -ημx\le 1,\ (2)$$

Με πρόσθεση των (1) και (2) προκύπτει ότι: $-2\le συνx-ημx\le 2$, δηλαδή $-2\le f(x)\le 2$, που είναι το ζητούμενο.

Αν υποθέσουμε ότι ο αριθμός 2 είναι η μέγιστη τιμή της f, τότε για κάποιο $x_o\in\mathbb{R}$ ισχύει $συνx_o=1$ και $ημx_o=-1$, οπότε $ημ^2x_o+συν^2x_o=1+1=2$, που είναι άτοπο. Άρα ο αριθμός 2 δεν είναι η μέγιστη τιμή της f.

γ) i. Με $x=0$ έχουμε: $f(0)=συν0-ημ0=1-0=1$, οπότε η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0,1)$.

ii. Με $y=0$ δηλαδή $f(x)=0$ έχουμε: $συνx-ημx=0\Leftrightarrow συνx=ημx$. Μια προφανής λύση της εξίσωσης είναι ο αριθμός $\frac{π}{4}$ και επειδή $συν\left(π+\frac{π}{4}\right)=-συν\frac{π}{4}=-ημ\frac{π}{4}=ημ\left(π+\frac{π}{4}\right)$, μια άλλη λύση της είναι ο αριθμός $π+\frac{π}{4}=\frac{5π}{4}$.

Άρα δυο κοινά σημεία της C_f με τον $x'x$ είναι τα $\left(\frac{π}{4},0\right)$ και $\left(\frac{5π}{4},0\right)$.