ΛΥΣΗ

α) Θέτουμε $ημω = x$ και η εξίσωση γράφεται:

$$5x^3 - 8x^2 - 7x + 6 = 0.$$

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης είναι οι διαιρέτες του 6, δηλαδή οι $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$. Με δοκιμή διαπιστώνουμε ότι ο -1 είναι ρίζα. Κάνουμε τη διαίρεση $(5x^3 - 8x^2 - 7x + 6):(x+1)$.

5	-8	-7	6	-1
	-5	13	-6	
5	-13	6	0	

Άρα $5x^3 - 8x^2 - 7x + 6 = (x+1)(5x^2 - 13x + 6)$.

Το τριώνυμο $5x^2 - 13x + 6$ έχει διακρίνουσα $Δ = (-13)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 6 = 169 - 120 = 49$ και ρίζες:

$$x_1 = \frac{13 + \sqrt{49}}{2 \cdot 5} = \frac{13 + 7}{10} = 2$$

και

$$x_2 = \frac{13 - \sqrt{49}}{2 \cdot 5} = \frac{13 - 7}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

Επειδή $0 < ω < \frac{π}{2}$, είναι $0 < ημω < 1$, άρα η μόνη αποδεκτή λύση είναι $ημω = \frac{3}{5}$.

β)

i. Ισχύει ότι:

$$ημ^2ω + συν^2ω = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^2 + συν^2ω = 1 \Leftrightarrow$$

$$συν^2ω = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

Επειδή $0 < ω < \frac{π}{2}$, είναι $συνω > 0$. Άρα,

$$συνω = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}.$$

ii. Από τον τριγωνομετρικό κύκλο γνωρίζουμε ότι το σημείο B έχει συντεταγμένες $(συνω, ημω)$, άρα $B(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$. Τα σημεία $Γ$ και $Δ$ είναι συμμετρικά του B ως προς τον άξονα $y'y$ και την αρχή O αντίστοιχα. Οπότε είναι:

$$Γ\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right), Δ\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right).$$

iii. Το ημίτονο και το συνημίτονο των γωνιών $A\hat{O}B$, $A\hat{O}\Gamma$ και $A\hat{O}\Delta$ είναι οι τεταγμένες και οι τετμημένες των σημείων B, Γ και Δ αντίστοιχα. Άρα,

$$\eta\mu A\hat{O}B = \frac{3}{5}, \qquad \sigma\upsilon\nu A\hat{O}B = \frac{4}{5},$$
$$\eta\mu A\hat{O}\Gamma = \frac{3}{5}, \qquad \sigma\upsilon\nu A\hat{O}\Gamma = -\frac{4}{5},$$

και

$$\eta\mu A\hat{O}\Delta = -\frac{3}{5}, \qquad \sigma\upsilon\nu A\hat{O}\Delta = -\frac{4}{5}.$$